

温室风振分析中的压杆弯曲振动动态刚度阵模型

邓婷¹ 姜旭瞳¹ 丁敏^{1*} 汤丽锋²

(1. 中国农业大学水利与土木工程学院,北京 100083;

2. 国核工程有限公司,上海 200233)

摘要 针对温室风振分析中的压杆弯曲振动问题,根据考虑二阶效应和惯性力影响的压杆基本方程建立压杆横向弯曲振动微分方程,得到采用基函数和位移系数表达的压杆横向弯曲振动位移的向量表达式,结合位移边界条件求得以节点位移向量表达的位移系数,给出压杆截面内力方程,进而得到以节点位移向量表达的杆端内力,最终给出综合质量矩阵、几何矩阵和刚度矩阵的精确动态刚度矩阵。研究结果表明:一般的插值形函数单元模型需加密单元才能提高计算精度,但仍存在误差,而本研究模型得到的压杆横向弯曲自振圆频率与解析法计算获得的理论解完全相同,为精确解。

关键词 温室; 风振; 压杆; 弯曲振动; 二阶效应; 动态刚度阵模型

中图分类号 TU261

文章编号 1007-4333(2018)01-0120-06

文献标志码 A

Dynamic stiffness matrix model for the flexural vibration of compression bar in greenhouse wind vibration analysis

DENG Ting¹, JIANG Xutong¹, DING Min^{1*}, TANG Lifeng²

(1. College of Water Resources & Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China;

2. State Nuclear Power Engineering Company, Shanghai 200233, China)

Abstract Aiming at the problem of flexural vibration of compression bar in greenhouse wind vibration analysis, differential equation for transverse flexural vibration of compression bar was designed according to fundamental equations of compression bar considering its second-order effect and inertia force. Displacement vector expressed by the basis function and the displacement coefficient for transverse flexural vibration of compression bar were also achieved. Based on the displacement boundary condition, displacement coefficient expressed by nodal displacement vector was obtained. Internal force equations of compression bar were established and then internal force at bar ends expressed by nodal displacement vector was provided. Finally, total dynamic stiffness matrix colligating mass matrix, geometry matrix and stiffness matrix was given. This method provided exact solution for the flexural vibration of compression bar expressed in matrix and vector format, which was simple and useful. When use the interpolation function unit model, dividing the unit more densely could improve the accuracy of the calculation, but there were still errors. The results showed that the angular frequency of the transverse bending of compression bar obtained by the study model was the exact solution, which was exactly the same as the theoretical solution obtained by the analytical method.

Keywords greenhouse; wind vibration; compression bar; flexural vibration; second-order effect; stiffness matrix method

风荷载是温室结构分析中需要考虑的主要荷载,风荷载对结构产生的动力响应是温室结构设计

中的重点问题之一^[1]。现阶段,针对温室结构风振效应系统的研究和设计较少,因设计缺陷而发生的

收稿日期: 2016-12-22

基金项目: 农业部农业设施结构工程重点实验室开放课题(201502); 国家自然科学基金项目(51279206)

第一作者: 邓婷, 硕士研究生, E-mail: dengting@cau.edu.cn

通讯作者: 丁敏, 副教授, 主要从事农业设施工程结构安全性能研究, E-mail: dingmin@cau.edu.cn

极端风灾下的温室垮塌事故频频出现^[2]。温室结构风振效应有两大特点:一是结构刚度小,脉动风引起的风振显著;二是细长压杆多,轴力对压杆弯曲振动的影响明显。考虑轴力作用的影响,尤其是轴压力影响的压杆弯曲振动是典型的几何非线性动力问题,其振动特性与纯弯构件完全不同。研究压杆弯曲振动动态刚度阵模型对温室中压弯构件(如立柱、桁架中弦杆和腹杆等)的分析和设计,具有重要的科学意义。

目前,国内外在温室结构计算方面的研究较多。有研究表明温室结构采用工业与民用建筑的计算方法会产生较大误差,并给出了基于位移法的风荷载作用下温室结构内力和变形计算的精确方法^[3];本课题组也曾考虑了温室结构的材料非线性、几何大变形影响,建立了 Venlo 型温室结构计算模型,但均未考虑结构的动力响应^[4]。

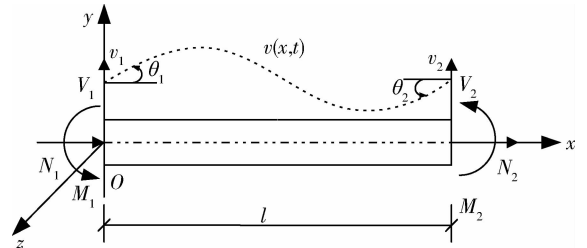
对于构件的弯曲振动分析问题,已有研究提出了各种方法,主要有直接积分求解法、能量法^[5]、包括有限元法^[6]和动态刚度阵法的数值法等。应用直接积分求解法,求得了梁在轴力作用下、考虑粘滞阻尼情况下和广义支座激励下的运动微分方程,得到了梁的挠度位移的解析解^[7]。应用伽辽金法,考虑自重的均匀悬臂梁的横向振动问题得到了研究^[8]。现阶段,已有研究建立了欧拉-伯努利梁和铁木辛柯梁精确形函数和刚度矩阵^[9]、解析型欧拉梁动力单元解析形函数和刚度矩阵^[10],虽都为精确的形函数和刚度矩阵,但均未考虑轴力对弯曲振动的影响。

几何非线性问题也是结构分析中的热点问题之一。本课题组曾采用能量变分法构造了解析型压杆单元,但其并未考虑轴力对弯曲振动的影响^[11]。作用在弯曲构件上的轴向力既会改变梁的自振频率,又会改变梁的振型,故考虑轴力、惯性力共同作用时,场问题将复杂化,再加上复杂的边界条件,增加了求解的困难。已有研究讨论了轴力作用下欧拉-伯努利梁的横向振动^[12],其运用能量变分法求解了单元的形函数和刚度矩阵,但并没有给出刚度矩阵的显示公式,实际计算时无法应用,若采用数值积分计算,积分方案不唯一,必然会影响到计算精度。目前能量法大多是采用仅满足上边界条件的位移函数,并不能准确表达位移的基本特征,所求结果都为近似解。刚度矩阵法即为解析法的矩阵格式,用此法求解刚度矩阵不但过程简单,且可得精确解。

本研究拟针对温室风振分析中的压杆横向弯曲振动问题,推导考虑轴力影响的压杆横向弯曲振动的精确分析模型,以期分析细长压杆的自振特性,计算温室结构风压脉动系数,预测温室结构风载和讨论温室风振性能等研究提供理论依据。

1 基本原理

为了方便压杆的表达,压杆坐标系定义为: x 轴与压杆轴线重合,向右为正,零点位于压杆的左端; y 轴向上为正; z 轴正方向按右手螺旋规则确定,坐标系符合右手螺旋法则(图 1)。



N_1, N_2 为压杆节点处轴向荷载, kN; V_1, V_2 为压杆节点处横向荷载, kN; M_1, M_2 为压杆节点处弯矩荷载, kN · m; v_1, v_2 为节点处挠度, mm; $v(x, t)$ 为 x 处 t 时刻的挠度, mm; θ_1, θ_2 为节点处转角, rad; l 为压杆长度, mm。

N_1 and N_2 are axial loads at the node of compression bar, kN; V_1 and V_2 are transverse loads at the node of compression bar, kN; M_1 and M_2 are bending loads at the node of compression bar, kN · m; v_1 and v_2 are the deflections at the node, mm; $v(x, t)$ is deflection at x when it is t , mm; θ_1 and θ_2 are angular displacements at the node, rad; l is the length of compression bar, mm.

图 1 压杆坐标定义

Fig. 1 Coordinate definition of compression bar

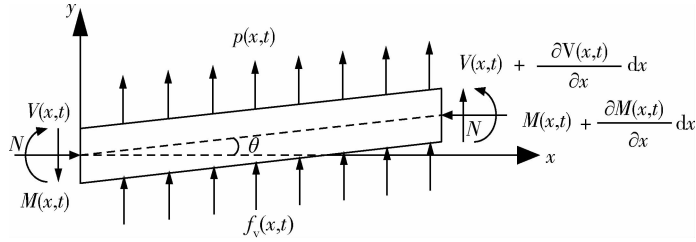
所有荷载(静、动荷载)与坐标轴方向一致为正;压杆的位移(挠度、转角)正方向与坐标轴方向一致为正。当截面法线与坐标 x 方向一致时,压杆内力与坐标方向一致时为正、反之为负;截面法线与坐标 x 方向相反时,压杆内力与坐标方向相反时为正、反之为负。根据定义,压杆的竖向位移(挠度)向上为正、转角位移逆时针为正;分布及集中力向上为正、分布及集中力矩逆时针为正;压杆截面剪力逆时针为正、右端截面弯矩逆时针为正、左端截面弯矩顺时针为正。

节点力向量定义为 $\mathbf{F}_n = \{V_1 \quad M_1 \quad V_2 \quad M_2\}^T$, 相应地节点位移向量为 $\mathbf{\delta}_n = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T$, 压杆杆端内力向量定义为 $\mathbf{F}^e = \{V(0) \quad M(0) \quad V(l) \quad M(l)\}^T$ 。其中: V_1, V_2 为压杆节点处横向荷载, M_1, M_2 为压杆节点处弯矩荷载, v_1, v_2 为节点处挠度,

θ_1, θ_2 为节点处转角, $V(0), V(l)$ 为杆端截面处横向内力, $M(0), M(l)$ 为杆端截面处弯矩内力。

假设压杆微段在振动过程中受端部力、惯性力

和杆上外荷载的共同作用, 且时刻处于平衡状态。为准确描述压杆受力情况, 对压杆微段进行受力分析见图 2。



N 为压杆轴向内力, kN ; $V(x, t)$ 为 x 处 t 时刻截面上的横向内力, kN ; $M(x, t)$ 为 x 处 t 时刻截面上的弯矩内力, $\text{kN} \cdot \text{m}$; $f_v(x, t)$, $p(x, t)$ 分别为压杆单位长度上的惯性力和分布力, kN/m 。

N is axial internal force of compression bar, kN ; $V(x, t)$ is transverse internal force at x when it is t , kN ; $M(x, t)$ is bending moment at x when it is t , $\text{kN} \cdot \text{m}$; $f_v(x, t)$ and $p(x, t)$ are inertia force and distributed force on unit length of compression bar, respectively, kN/m 。

图 2 压杆微段受力简图

Fig. 2 Forces on micro segment

2 控制方程

2.1 基本方程

2.1.1 几何方程

假设压杆在图 2 所示受力情况下, 弯曲作用产生的变形足够小, 挠度变形的二阶微量可忽略不计; 轴向压力作用下产生的横向位移较大, 二阶效应不可忽略, 则压杆弯曲变形的几何方程如下:

截面弯曲转角为

$$\theta(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

截面曲率为

$$\kappa(x, t) = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (2)$$

2.1.2 平衡方程

平衡方程包括横向力平衡方程、力矩平衡方程和弯矩-横向力平衡方程, 分别为

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -p(x, t) + m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = -V(x, t) + N \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (4)$$

$$-p(x, t) + m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = N \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} \quad (5)$$

式中: m 为单位长度上压杆的质量, 假设质量均布, m 为常数。

2.1.3 物理方程

压杆的物理方程, 即弯矩内力与挠度变形之间

的关系为

$$M = EI\kappa = EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (6)$$

式中: E 为弹性模量; I 为压杆截面惯性矩; κ 为截面曲率。本研究的压杆为等截面直杆, 故刚度 EI 为常数。

2.2 综合方程

综合以上几何方程、平衡方程和物理方程, 可得均布质量下压杆弯曲振动刚度平衡方程

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (7)$$

3 微分方程求解

当只考虑节点荷载和均布惯性力来研究压杆的自由振动时, 可只求微分方程的通解, 不考虑特解的大小。令外荷载为 0, 参考式(7)可得到如下弯曲振动偏微分方程

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

令 $v(x, t) = \phi(x)Y(t)$, 且等截面杆质量均布, 采用分离变量法对式(8)进行变换, 则有

$$EI\phi^{(4)}(x)Y(t) + m\phi(x)\ddot{Y}(t) - N\phi^{(2)}(x)Y(t) = 0 \quad (9)$$

进一步, 可变换为

$$\frac{\phi^{(4)}(x) - \frac{N}{EI}\phi''(x)}{\phi(x)} + \frac{m\ddot{Y}(t)}{EIY(t)} = 0 \quad (10)$$

令 $\frac{\phi^{(4)}(x) - \frac{N}{EI}\phi''(x)}{\phi(x)} = -\frac{m\ddot{Y}(t)}{EIY(t)} = \xi^4$, 则可进行如下变换

$$\begin{cases} \phi^{(4)}(x) - \frac{N}{EI}\phi''(x) - \xi^4\phi(x) = 0 \\ \ddot{Y}(t) + \xi^4\frac{EI}{m}Y(t) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

求解式(11)中第二个方程可得

$$Y(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \quad (12)$$

式中: $\omega = \xi^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$ 为压杆的弯曲振动圆频率, 且 $\omega^2 = \xi^4 \frac{EI}{m}$ 。式(12)为单自由度体系无阻尼振动方程, 说明轴向力作用时体系的自由振动仍为简谐振动。定义 $n^2 = \frac{|N|}{EI}$, 则式(11)中第二个方程可化为四阶常微分方程

$$\phi^{(4)}(x) + n^2\phi''(x) - \omega^2\frac{m}{EI}\phi(x) = 0 \quad (13)$$

令 $\alpha = \sqrt{\left(\omega^2\frac{m}{EI} + \frac{n^4}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{n^2}{2}}$, $\beta = \sqrt{\left(\omega^2\frac{m}{EI} + \frac{n^4}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{n^2}{2}}$, 且 $\alpha^2 - \beta^2 = n^2$ 。则可求得式(13)的解为

$$\phi(x) = b_1 \sin\alpha x + b_2 \cos\alpha x + b_3 e^{\beta x} + b_4 e^{-\beta x} \quad (14)$$

式中: b_1, b_2, b_3, b_4 为常系数。式(14)即为压杆横向弯曲振动位移的一般格式。

4 位移及内力

4.1 位移

将均布质量等截面压杆横向弯曲振动的位移方程式(14)简化为

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^4 f_i(x)b_i = \mathbf{f}\mathbf{b} \quad (15)$$

式中: \mathbf{f} 为位移基函数; \mathbf{b} 为位移系数, $\mathbf{b} = \{b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4\}^T$, 位移系数决定压杆振动的形状。位移基函数表达式为

$$\mathbf{f}(x) = \{f_1(x) \ f_2(x) \ f_3(x) \ f_4(x)\} = \{\sin\alpha x \ \cos\alpha x \ e^{\beta x} \ e^{-\beta x}\} \quad (16)$$

为简化计算, 对式(16)作如下微分变换

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f}\mathbf{Z} \quad (17)$$

式中 \mathbf{Z} 为微分变换矩阵, 为

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

由于位移系数 \mathbf{b} 为与 x 无关的常数, 故结合式(15)可得

$$\phi' = \mathbf{f}\mathbf{Z}\mathbf{b} \quad (18)$$

$$\phi'' = \mathbf{f}\mathbf{Z}\mathbf{Z}\mathbf{b} \quad (19)$$

$$\phi''' = \mathbf{f}\mathbf{Z}\mathbf{Z}\mathbf{Z}\mathbf{b} \quad (20)$$

4.2 内力

由压杆的物理方程式(6)和(19))得到其弯矩内力为

$$M(x) = EI\mathbf{f}\mathbf{Z}\mathbf{Z}\mathbf{b} \quad (21)$$

由压杆的力矩平衡方程式(4)、(18)和(20))得到其横向内力为

$$V(x) = -EI\mathbf{f}\mathbf{Z}\mathbf{Z}\mathbf{Z}\mathbf{b} + N\mathbf{f}\mathbf{Z}\mathbf{b} \quad (22)$$

5 位移系数

压杆上 x 处转角位移 $\theta(x) = \phi' = \mathbf{f}\mathbf{Z}\mathbf{b}$ 。假设压杆位移边界条件为: 在压杆左端, $x=0, \phi(x=0) = v_1, \theta(x=0) = \theta_1$; 在压杆右端, $x=l, \phi(x=l) = v_2, \theta(x=l) = \theta_2$ 。则

$$\delta_v^c = \begin{Bmatrix} \phi(x=0) \\ \theta(x=0) \\ \phi(x=l) \\ \theta(x=l) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(0) \\ \mathbf{f}'(0) \\ \mathbf{f}(l) \\ \mathbf{f}'(l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(0) \\ \mathbf{f}'(0)\mathbf{Z} \\ \mathbf{f}(l) \\ \mathbf{f}'(l)\mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{b} \quad (23)$$

\mathbf{A} 为 4×4 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(0) \\ \mathbf{f}'(0)\mathbf{Z} \\ \mathbf{f}(l) \\ \mathbf{f}'(l)\mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

由式(23)即可得位移系数

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1}\delta_v^c \quad (24)$$

6 杆端内力及节点力

6.1 杆端内力

将式(24)带入内力方程式(21)和(22)), 得到压杆的弯矩内力和横向内力为

$$M(x) = EI\mathbf{f}\mathbf{Z}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{-1}\delta_v^c \quad (25)$$

$$V(x) = -EI\mathbf{f}\mathbf{Z}\mathbf{Z}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{-1}\delta_v^c + N\mathbf{f}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{-1}\delta_v^c \quad (26)$$

进而可确定杆端内力为

$$F^e = \begin{Bmatrix} V(0) \\ M(0) \\ V(l) \\ M(l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EI f(0)ZZZA^{-1}\delta_v^e + Nf(0)ZA^{-1}\delta_v^e \\ EI f(0)ZZA^{-1}\delta_v^e \\ -EI f(l)ZZZA^{-1}\delta_v^e + Nf(l)ZA^{-1}\delta_v^e \\ EI f(l)ZZA^{-1}\delta_v^e \end{Bmatrix} \quad (27)$$

6.2 节点力

根据压杆节点力向量和杆端内力向量的定义, 可得到压杆节点力 F_v^e 和杆端内力 F^e 的关系为

$$F_v^e = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -V(0) \\ -M(0) \\ V(l) \\ M(l) \end{Bmatrix} \quad (28)$$

考虑 $n^2 = \frac{|N|}{EI}$, 且轴压力为负, 所以 $N = -n^2 EI = -(\alpha^2 - \beta^2)EI$, 将式(27)代入(28), 即可得压杆节点力为

$$F_v^e = EI \begin{bmatrix} f(0)ZZZ + (\alpha^2 - \beta^2)f(0)Z \\ -f(0)ZZ \\ -f(l)ZZZ - (\alpha^2 - \beta^2)f(l)Z \\ f(l)ZZ \end{bmatrix} A^{-1} \delta_v^e \quad (29)$$

7 动态刚度矩阵

根据压杆节点力方程, 可得到以基函数向量和转换矩阵表达的动态刚度矩阵, 其为综合了质量矩

阵、几何矩阵和刚度矩阵的精确动态刚度矩阵。具体推导过程如下:

式(29)可表示为

$$F_v^e = EIDA^{-1} \delta_v^e \quad (30)$$

式中

$$D = \begin{bmatrix} f(0)ZZZ + (\alpha^2 - \beta^2)f(0)Z \\ -f(0)ZZ \\ -f(l)ZZZ - (\alpha^2 - \beta^2)f(l)Z \\ f(l)ZZ \end{bmatrix}$$

进而可得

$$F_v^e = K^e \delta_v^e \quad (31)$$

式中: K^e 为压杆的总动态刚度矩阵, 表示压杆抵抗变形的能力, 反映了节点位移向量和外界荷载和约束之间的关系, 其表达式为

$$K^e = EIDA^{-1} \quad (32)$$

8 算例

为验证本研究模型的精确性, 分别采用动态刚度矩阵模型和插值形函数单元模型计算不同轴力作用下压杆振动圆频率, 将计算值与理论解析解进行对比。两端铰支矩形压杆结构模型参数如下: 杆长为 6 000 mm, 截面尺寸为 200 mm × 200 mm, 弹性模量为 30.5 GPa, 密度为 2 500 kg/m³, 杆端轴压力分别为 0、100、200 和 300 kN。不同计算模型下不同计算方案得到的压杆自振圆频率见表 1。

可以看出: 轴力对杆件横向弯曲自振圆频率影响显著, 轴压力越大, 圆频率越小; 本研究模型所得结果为精确解, 其解由矩阵方程计算直接得到, 并未做任何假设; 采用插值形函数单元模型计算得到的

表 1 不同轴压力下压杆自振圆频率

Table 1 The circular frequency of natural vibration of the compression bar under different axial compression

模型 Model	单元数 Element number	轴压力 N/kN Axial compression			
		N=0	N=100	N=200	N=300
理论值/(rad/s) Theoretical value	—	55.286 173 5	52.748 510 0	50.082 428 3	47.266 203 0
本研究模型 This model	计算值/(rad/s)	55.286 173 5	52.748 510 0	50.082 428 3	47.266 203 0
	相对误差/%	0	0	0	0
插值形函数单元模型 Element model by Interpolation shape function	计算值/(rad/s)	61.363 116 8	59.602 593 4	57.788 460 6	55.915 500 6
	相对误差/%	10.991 7	12.993 9	15.3868	18.299 1
Element model by Interpolation shape function	计算值/(rad/s)	55.504 382 4	52.976 198 7	50.321 152 6	47.517 983 6
	相对误差/%	0.394 7	0.431 7	0.476 8	0.532 7
Element model by Interpolation shape function	计算值/(rad/s)	55.300 529 3	52.558 737 7	49.665 656 6	46.593 111 7
	相对误差/%	0.025 9	-0.359 8	-0.832 0	-1.424 1

单元数为 1 时的计算值存在较大误差,轴力越大,误差越大,10%以上的计算误差在工程上不能接受,为了提高精度,可加密杆件单元划分,但仍不是精确解;将杆件划分为 4 个单元时,应用插值形函数单元模型机型计算可得到相对精确的近似值,但节点数的增加导致计算工作量增大,计算时间和存储量都响应增加,计算过程繁琐、复杂。

9 结束语

1)本研究应用动态刚度阵法,对温室风振分析中的压杆弯曲振动问题进行了探讨,获得了以基函数向量及位移常数向量表达的压杆弯曲振动精确位移表达式、以位移向量表达的杆端内力方程、精确动态刚度矩阵,形成了研究压杆振动问题的高精度求解方法。

2)采用算例验证本研究计算模型的计算精度和效率,证明本研究模型不需要划分单元即可得到杆件自振圆频率的精确解,也反映了轴力对杆件横向弯曲自振圆频率的影响。

参考文献 References

[1] 雷隽卿,王东霞,蒋秀根,李保明. 温室结构风振效应的数值模拟[J]. 中国农业大学学报,2007,12(4):85-89
Lei J Q, Wang D X, Jiang X G, Li B M. Numerical analysis on wind vibration effect on greenhouse structure[J]. *Journal of China Agricultural University*, 2007, 12(4): 85-89 (in Chinese)

[2] 蒋秀根,刷锦三,张丽莉. 考虑桁架刚度的温室结构风载效应分析方法[J]. 中国农业大学学报,2005,10(6):70-74
Jiang X G, Ju J S, Zhang L L. Analytical method for wind load effect on greenhouse structure considering of truss deformations[J]. *Journal of China Agricultural University*, 2005, 10(6): 70-74 (in Chinese)

[3] 周长吉. 暴风雪造成连栋温室倒塌的启示[J]. 农业工程技术: 温室园艺,2007(12):13-15
Zhou C J. The revelation of the collapse of multi-span greenhouse caused by blizzard[J]. *Agriculture Engineering Technology: Greenhouse & Horticulture*, 2007(12): 13-15 (in

Chinese)

[4] 丁敏,朱丹,许晶,蒋秀根,李密密. 风雪荷载作用下 Venlo 型温室结构整体性能研究[J]. 中国农业大学学报,2017,22(1):120-128
Ding M, Zhu D, Xu J, Jiang X G, Li M M. Space robustness of Venlo greenhouse structure under wind and snow load[J]. *Journal of China Agricultural University*, 2017, 22(1): 120-128 (in Chinese)

[5] R Brighenti, N S Bottoli. A novel finite element formulation for beams with composite cross-section[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, 89: 112-122

[6] 吴琛,周瑞忠,项洪. 基于三变量无单元法的杆系模型动力计算[J]. 地震工程与工程振动,2016,36(2):198-206
Wu C, Zhou R Z, Xiang H. Dynamic calculation of beam-column model based on three-variable element free Galerkin method [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Dynamics*, 2016, 36(2): 198-206 (in Chinese)

[7] 克拉夫 R,彭津 J. 结构动力学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2006
Clough R, Penzien J. *Dynamic of Structures* [M]. Second edition. Beijing: Higher Education Press, 2006 (in Chinese)

[8] Paidoussis M P, Maisons P E D T. Free vibration of a heavy, damped, vertical cantilever [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1971, 38(2): 524-526

[9] Shooshtari A, Khajavi R. An efficient procedure to find shape functions and stiffness matrices of nonprismatic Euler-Bernoulli and Timoshenko beam elements [J]. *European Journal of Mechanics A-Solids*, 2010, 29(5): 826-836

[10] 曹琼琼. 解析型 Euler 杆动力单元构造[D]. 北京:中国农业大学,2016
Cao Q Q. Development of Euler-beam dynamic element based on analytical shape function [D]. Beijing: China Agricultural University, 2016 (in Chinese)

[11] 汤丽锋. 解析型压杆单元构造[D]. 北京:中国农业大学,2016
Tang L F. Development of compressive bar element based on analytical shape function [D]. Beijing: *China Agricultural University*, 2016 (in Chinese)

[12] 张广芸,张宏生,陆念力. Bernoulli-Euler 杆横向振动固有频率的轴力影响系数[J]. 工程力学,2011,28(10):65-71
Zhang G Y, Zhang H S, Lu N L. The axial load influence coefficient of natural frequencies for lateral vibration of a Bernoulli-Euler beam [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(10): 65-71 (in Chinese)

责任编辑:刘迎春