

# 一种新的混沌激振器及其动力学特性

邢如义<sup>1</sup> 杨勇<sup>2</sup>

(1. 河北工程大学 教育技术中心, 河北 邯郸 056038;

2. 中国农业机械化科学研究院, 北京 100083)

**摘要** 在分析已有混沌发生机构的基础上,结合混沌中的倍周期分叉现象,设计了一种新的混沌激振器。该激振器由2个偏心轮构成,2个偏心轮之间的约束由传统的光滑铰链改为沿圆形轨道滑动,从而使系统产生倍周期现象的条件大幅度放宽。建立了该混沌激振器的动力学模型,通过仿真试验分析其动力学特性。结果表明,较普遍应用的三连杆混沌激振器,该混沌激振器具有更强的混沌特性和更为宽松的参数选择,因而具有更大的使用范围。

**关键词** 混沌激振器; 动力学特性; 非线性; 凸轮

中图分类号 U 415.521

文章编号 1007-4333(2014)01-0175-05

文献标志码 A

## A new chaotic exciter and its dynamic characteristics

XING Ru-yi<sup>1</sup>, YANG Yong<sup>2</sup>

(1. Center of Education Technology, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China;

2. Chinese Academy of Agricultural Mechanization Science, Beijing 100083, China)

**Abstract** Using the fold bifurcation theorem, a new chaotic exciter was designed based on existed chaotic exciters. The new chaotic exciter was made up of two eccentric cams. The kinematic pair between them was constructed with circular orbit instead of traditional gemel hinge, which relaxes the trigger condition of the period doubling bifurcation. In addition, the corresponding dynamic model of the chaotic exciter was built, and then the dynamic characteristic was analyzed with simulation. The simulation results showed that the chaotic exciter had stronger chaos characteristics and more parameter selections compared with the widespread application of three link chaotic exciter, which meant a better fitting to field condition.

**Key words** chaotic exciter; dynamic characteristic; nonlinear; cam

对确定性系统中混沌现象的研究是近几十年的研究热点。对混沌现象的研究目的可分为混沌控制<sup>[1]</sup>和混沌利用<sup>[2]</sup>。近年来对以混沌控制为目的的混沌现象研究较多。混沌振动是一种伪随机振动,具有较宽的频谱和较强的速度变化,可有效应用于肥料混合搅拌、种子振动筛选等农业生产领域。该研究在充分研究非线性结构的基础上,提出了具有较强混沌成分的混沌激振器,在振动压路机<sup>[3-9]</sup>和混沌振动筛<sup>[10]</sup>等机械设备<sup>[11]</sup>中具有较好的应用效果,但混沌激振器的动力学模型对偏心轮的质量和几何尺寸要求较为苛刻,产生混沌振动的参数选择区间较小,用于量化混沌成分比重的 Lyapunov 指数较

小,限制了该激振器的使用范围。本研究旨在设计一种新的混沌激振器,以改进已有激振器存在的问题。

### 1 混沌激振器及其动力学模型

三连杆混沌激振器(图 1(a))已得到深入研究,并广泛应用于机械制造、农业机械、轻工、食品等行业。三连杆混沌激振器连杆之间通过铰链连接,铰链约束的自由度多于圆形滑道约束,很容易引起该机构的周期转动,因此对连杆的几何特性、连杆质量、质心位置以及主动杆的转速等要求较高。本研究所提出的混沌激振器是在三连杆混沌激振器的基础上修改得到的。采用偏心轮作为主动轮,另一偏

收稿日期: 2013-04-26

基金项目: “十二五”国家科技支撑计划课题(2012BAD35B02)

第一作者: 邢如义, 副教授, 主要从事小波分析和非线性动力学研究, E-mail: xingruyi\_hue@163.com

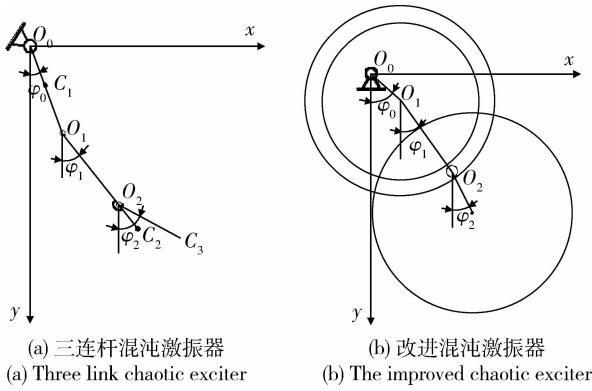


图1 混沌激振器模型  
Fig.1 Chaotic exciter model

心轮  $O_2$  的转动中心绕  $O_1$  的凸轮表面运动。显然,  $O_2$  相对于凸轮  $O_1$  的凸轮表面的运行曲线符合余弦曲线规律,这就保证了滑动的平稳性。不难理解,主动轮  $O_1$  在进行周期运动时,偏心轮的运动中心  $O_2$  绕主动轮的表面做周期运动,同时偏心轮  $O_2$  也在做自转运动。3种周期运动混杂的一起,很容易激发出系统的混沌振动。通过建立系统的动力学模型分

析系统的混沌动力学特性。

设偏心轮 I 的质量为  $m_1$ ,对质心  $C_1(x_{c_1}, y_{c_1})$  的转动惯量为  $J_{C_1} = \frac{1}{4}m_1R_1^2$ ,其角速度为  $\omega$ ,偏心距为  $l_1$ ,半径为  $R_1$ ;偏心轮 II 的质量为  $m_2$ ,对质心  $C_2(x_{c_2}, y_{c_2})$  的转动惯量为  $J_{C_2} = \frac{1}{4}m_2R_2^2$ 。铰链  $O_2(x_{o_2}, y_{o_2})$  和质心  $C_2$  的速度为  $v_{o_2}$  和  $v_{c_2}$ ,偏心距和半径分别为  $l_2$  和  $R_2$ 。以上参数存在以下关系:

$$x_{c_1} = l_1 \sin(\phi_0), \dot{x}_{c_1} = l_1 \omega \cos(\phi_0)$$

$$y_{c_1} = l_1 \cos(\phi_0), \dot{y}_{c_1} = -l_1 \omega \sin(\phi_0)$$

$$x_{o_2} = x_{c_1} + R_1 \sin(\phi_1), \dot{x}_{o_2} = \dot{x}_{c_1} + R_1 \dot{\phi}_1 \cos(\phi_1)$$

$$y_{o_2} = y_{c_1} + R_1 \cos(\phi_1), \dot{y}_{o_2} = \dot{y}_{c_1} - R_1 \dot{\phi}_1 \sin(\phi_1)$$

$$x_{c_2} = x_{o_2} + l_2 \sin(\phi_2), \dot{x}_{c_2} = \dot{x}_{o_2} + l_2 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2)$$

$$y_{c_2} = y_{o_2} + l_2 \cos(\phi_2), \dot{y}_{c_2} = \dot{y}_{o_2} - l_2 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_2)$$

其中:  $\phi_0$  为偏心轮 I 相对于铰链  $O_0$  的角位移,  $\phi_1$  为铰链  $O_2$  相对于铰链  $O_1$  的角位移,  $\phi_2$  为偏心轮 II 相对于铰链  $O_2$  的角位移。铰链  $O_2$  的速度为:

$$v_{o_2}^2 = (\dot{x}_{o_2})^2 + (\dot{y}_{o_2})^2 = (\dot{x}_{c_1} + R_1 \dot{\phi}_1 \cos(\phi_1))^2 + (\dot{y}_{c_1} - R_1 \dot{\phi}_1 \sin(\phi_1))^2 =$$

$$(l_1 \omega)^2 + (R_1 \dot{\phi}_1)^2 + 2\dot{\phi}_1 l_1 (\dot{x}_{c_1} \cos(\phi_1) - \dot{y}_{c_1} \sin(\phi_1)) =$$

$$(l_1 \omega)^2 + (R_1 \dot{\phi}_1)^2 + 2\dot{\phi}_1 l_1 l_2 \omega \cos(\omega t - \phi_1)$$

偏心轮 II 质心  $C_2$  的速度为:

$$(v_{c_2})^2 = (\dot{x}_{c_2})^2 + (\dot{y}_{c_2})^2 = (l_1 \omega \cos(\phi_0) + R_1 \dot{\phi}_1 \cos(\phi_1) + l_2 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2))^2 +$$

$$(-l_1 \omega \sin(\phi_0) - R_1 \dot{\phi}_1 \sin(\phi_1) - l_2 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_2))^2 = (v_{o_2})^2 + (l_2 \dot{\phi}_2)^2 +$$

$$2l_1 l_2 \dot{\phi}_2 \omega \sin(\phi_0 - \phi_2) + 2R_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

1)混沌激振器系统的动能。偏心轮 I 做定轴转动,其动能为:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1(l_1 \omega)^2 + \frac{1}{2}J_{C_1} \omega^2 = \frac{1}{8}m_1 \omega^2 (4l_1^2 + R_1^2) \tag{1}$$

偏心轮 II 做平面运动,其动能为:

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2(v_{c_2})^2 + \frac{1}{2}J_{C_2}(\dot{\phi}_2)^2 = \frac{1}{2}m_2[(l_1 \omega)^2 + (R_1 \dot{\phi}_1)^2 + 2\dot{\phi}_1 l_1 l_2 \omega \cos(\omega t - \phi_1) + (l_2 \dot{\phi}_2)^2] +$$

$$2l_1 l_2 \dot{\phi}_2 \omega \sin(\phi_0 - \phi_2) + 2R_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)] + \frac{1}{8}m_2(R_2 \dot{\phi}_2)^2 \tag{2}$$

系统总动能  $T$  为:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_2[(l_1 \omega)^2 + (R_1 \dot{\phi}_1)^2 + 2\dot{\phi}_1 l_1 l_2 \omega \cos(\omega t - \phi_1) + (l_2 \dot{\phi}_2)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_2 \omega \sin(\phi_0 - \phi_2) +$$

$$2R_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)] + \frac{1}{8}[m_1 \omega^2 (4l_1^2 + R_1^2) + m_2 (R_2 \dot{\phi}_2)^2]$$

2)混沌激振器系统的势能。 $\phi_0 = \phi_1 = \phi_2 = 0$  时,系统势能为 0,则在任意位置偏心轮 I 的势能为:

$$U_1 = m_1 g l_1 (1 - \cos(\omega t)) \tag{3}$$

偏心轮 II 的势能为

$$U_2 = m_2 g [l_1 (1 - \cos(\omega t)) + R_1 (1 - \cos(\phi_1)) + l_2 (1 - \cos(\phi_2))] \quad (4)$$

混沌激振器系统的总势能为：

$$U = U_1 + U_2 = m_1 g l_1 (1 - \cos(\omega t)) + m_2 g [l_1 (1 - \cos(\omega t)) + R_1 (1 - \cos(\phi_1)) + l_2 (1 - \cos(\phi_2))] = (m_1 + m_2) g l_1 (1 - \cos(\omega t)) + m_2 g [R_1 (1 - \cos(\phi_1)) + l_2 (1 - \cos(\phi_2))]$$

拉氏函数

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_2 [(\dot{l}_1 \omega)^2 + (R_1 \dot{\phi}_1)^2 + 2 \dot{\phi}_1 l_1 l_2 \omega \cos(\omega t - \phi_1) + (l_2 \dot{\phi}_2)^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\phi}_2 \omega \sin(\phi_0 - \phi_2) + 2 R_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)] + \frac{1}{8} [m_1 \omega^2 (4 l_1^2 + R_1^2) + m_2 (R_2 \dot{\phi}_2)^2] - (m_1 + m_2) g l_1 (1 - \cos(\omega t)) + m_2 g [R_1 (1 - \cos(\phi_1)) + l_2 (1 - \cos(\phi_2))] \quad (5)$$

将拉氏函数式(5)带入第二类 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_i} = 0, i = 1, 2 \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} &= m_2 (R_1)^2 \dot{\phi}_1 + m_2 l_1 R_1 \omega \cos(\omega t - \phi_1) + m_2 R_1 l_2 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} &= \frac{1}{4} m_2 ((2 l_2)^2 + (R_2)^2) \dot{\phi}_2 + m_2 l_1 l_2 \omega \sin(\omega t - \phi_2) + m_2 R_1 l_2 \dot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} \right) &= m_2 (R_1)^2 \ddot{\phi}_1 - m_2 l_1 R_1 \omega (\omega - \dot{\phi}_1) \sin(\omega t - \phi_1) + m_2 l_2 R_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) \ddot{\phi}_2 - \\ &\quad m_2 l_2 R_1 \dot{\phi}_2 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \sin(\phi_1 - \phi_2) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} \right) &= \frac{1}{4} m_2 ((2 l_2)^2 + (R_2)^2) \ddot{\phi}_2 + m_2 (R_1)^2 \ddot{\phi}_1 - m_2 l_1 l_2 \omega (\omega - \dot{\phi}_2) \cos(\omega t - \phi_2) + \\ &\quad m_2 l_2 R_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) \ddot{\phi}_1 - m_2 l_2 R_1 \dot{\phi}_1 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \sin(\phi_1 - \phi_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \phi_1} &= -m_2 g R_1 \sin(\phi_1) + m_2 l_1 R_1 \omega \dot{\phi}_1 \sin(\omega t - \phi_1) - m_2 l_2 R_1 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \phi_2} &= -m_2 g l_2 \sin(\phi_2) - m_2 l_1 l_2 \omega \dot{\phi}_2 \cos(\omega t - \phi_2) + m_2 l_2 R_1 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

这样,第二类 Lagrange 方程(6)可改写为以下非线性常微分方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

其中：

$$a_{11} = m_2 (R_1)^2, a_{12} = m_2 l_2 R_1 \cos(\phi_1 - \phi_2), a_{21} = a_{12}, a_{22} = \frac{1}{4} m_2 ((2 l_2)^2 + (R_2)^2)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= m_2 l_1 R_1 \omega (\omega - \dot{\phi}_1) \sin(\omega t - \phi_1) + m_2 l_2 R_1 \dot{\phi}_2 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \sin(\phi_1 - \phi_2) + \\ &\quad m_2 l_1 R_1 \omega \dot{\phi}_1 \sin(\omega t - \phi_1) - m_2 l_2 R_1 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - m_2 g R_1 \sin(\phi_1) = \\ &\quad m_2 l_1 R_1 \omega^2 \sin(\omega t - \phi_1) - m_2 l_2 R_1 (\dot{\phi}_2)^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - m_2 g R_1 \sin(\phi_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= -m_2 l_1 l_2 \omega (\omega - \dot{\phi}_2) \cos(\omega t - \phi_2) - m_2 l_1 l_2 \omega \dot{\phi}_2 \cos(\omega t - \phi_2) + \\ &\quad m_2 l_1 R_1 \dot{\phi}_1 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \sin(\phi_1 - \phi_2) + m_2 l_2 R_1 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - m_2 g l_2 \sin(\phi_2) = \\ &\quad -m_2 l_2 R_1 \omega^2 \cos(\omega t - \phi_2) + m_2 l_2 R_1 (\dot{\phi}_1)^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - m_2 g l_2 \sin(\phi_2) \end{aligned}$$

式(7)即为改进混沌激振器(图1(b))的动力学模型。

## 2 混沌激振器动力学仿真

判断系统振动是否具有混沌成分通常采用定性和定量2种方法。定性方法常采用非线性动力学模型的相轨图判断。混沌振动系统的相轨图具有不重复、无规律、反复缠绕等特点。定量方法则采用计算Lyapunov指数的方法来获得。一般最大Lyapunov指数 $>0$ 表示系统具有混沌振动。

### 2.1 混沌激振器的相轨图

为便于计算,设

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (8)$$

式(8)二阶常微分方程的解可表示为 $\ddot{\phi}_1 = \mathbf{B}_1/\mathbf{A}$ ,  $\ddot{\phi}_2 = \mathbf{B}_2/\mathbf{A}$ 。在仿真计算中,设2个凸轮的质量分别为 $m_1=120, m_2=129; l_0=0.000\ 334\ 64; l_1=0.003\ 9; l_2=0.0178; R=0.02$ 。

图2示出本研究改进的混沌激振器不同主动轮角速度 $\omega$ 下的相轨图。可以看出,随着主动轮角速

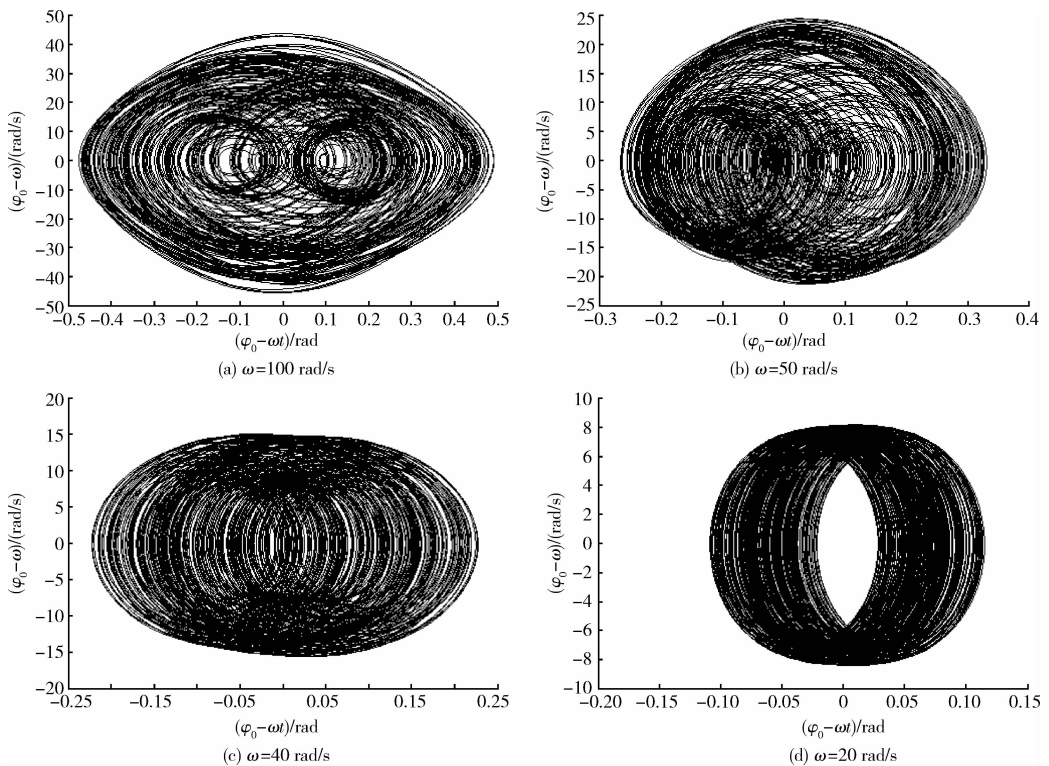


图2 不同主动轮旋转角速度 $\omega$ 下改进混沌激振器的相轨图

Fig. 2 Phase portraits of the improved chaotic exciter under different driving wheel rotation angular velocity  $\omega$

度的增加,相轨图越来越复杂,混沌成分渐浓。在一定程度上也反应了系统从周期运动转向混沌的过程。此外,也反应了本研究改进的混沌激振器对参数改变并不敏感。

### 2.2 最大Lyapunov指数 $\lambda_{max}$ 的计算

计算模型的最大Lyapunov指数 $\lambda_{max}$ 的常见方法

有定义法、正交法、wolf法和小数据量法等。根据Lyapunov指数的定义,需要推导系统的变分方程。设 $y_1 = \phi_1, y_2 = \phi_2, y_3 = \dot{\phi}_1, y_4 = \dot{\phi}_2, f_3(y) = \mathbf{B}_1/\mathbf{A}, f_4(y) = \mathbf{B}_2/\mathbf{A}$ ,其中 $y = [y_1\ y_2\ y_3\ y_4]^T$ ,则非线性方程可表示为:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3 \\ \dot{y}_2 = y_4 \\ \dot{y}_3 = f_3(y) \\ \dot{y}_4 = f_4(y) \end{cases} \quad (9)$$

式(9)在任一点处得 Jacobi 矩阵为：

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_3} & \frac{\partial f_3}{\partial y_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial y_1} & \frac{\partial f_4}{\partial y_2} & \frac{\partial f_4}{\partial y_3} & \frac{\partial f_4}{\partial y_4} \end{vmatrix} \quad (10)$$

由此可直接采用 Wolf 法求解得到混沌激振器的  $\lambda_{max}$  时间曲线图(图 3)。对比 2 种混沌激振器发现，改进混沌激振器的  $\lambda_{max}$  稳定在 7 左右，表明该激振

器具有较强的混沌属性，而三连杆结构的混沌激振器所对应的  $\lambda_{max}$  则只是在 0~0.03 震荡。显然本研究所提出的混沌激振器较三连杆混沌激振器具有更强的混沌特性。

### 3 结束语

本研究根据倍周期分岔和混沌现象之间的关系提出了一种新的混沌激振器，相对于广泛应用的三连杆混沌激振器具有更强的混沌特性，参数选择更为宽松。偏心轮运动学平稳，振动冲击小，结构和加工工艺简单，易于加工和实现。进一步需要研究的工作是，采用定性分析理论和优化理论方法，对系统的全局动力学结构进行分析，在全面考虑系统的功率、机械强度、混沌成分频谱等基础上，找出系统参数的最优值。

### 参 考 文 献

[1] 张海龙, 闵富红, 王恩荣. 关于 Lyapunov 指数计算方法的比较 [J]. 南京师范大学学报: 工程技术版, 2012, 12(1): 5-9

[2] 龙运佳, 梁以德. 近代工程动力学: 随机·混沌[M]. 北京: 科学出版社, 1998

[3] 王聪玲, 龙运佳. CVE-2 型混沌激振器运动的数值仿真和混沌识别[J]. 中国农业大学学报, 2000, 5(4): 26-29

[4] 杨勇, 龙运佳. 土壤塑性变形的混沌振动压路机动力学仿真研究[J]. 农业机械学报, 2003, 34(6): 44-46

[5] 龙运佳, 王书茂. 基于混沌理论的振动压路机[J]. 中国农业大学学报, 1998, 3(2): 19-22

[6] 龙运佳. 混沌柔性激振智能压路机的研究. 建筑机械化, 2010, 31(6): 49-51

[7] Le Van Quynh, 张建润, 刘晓波, 等. 振动压路机用于不同土壤地面的平顺性评价[J]. 农业工程学报, 2013, 29(9): 39-47

[8] 杨勇. 混沌振动压实的弹塑性动力学仿真研究[D]. 北京: 中国农业大学, 2002

[9] 张洪, 何康康, 史富增. 基于混沌激振冲击压实轮的动力学仿真[J]. 中国工程机械学报, 2012, 10(3): 276-279

[10] 胡志超, 陈有庆, 王海鸥, 等. 振动筛式花生收获机的设计与试验(简报)[J]. 农业工程学报, 2008, 24(10): 114-117

[11] 褚衍东, 张建刚, 李险峰, 等. 非自治旋转机械系统的混沌及其混沌同步[J]. 机械强度, 2010, 32(4): 536-541

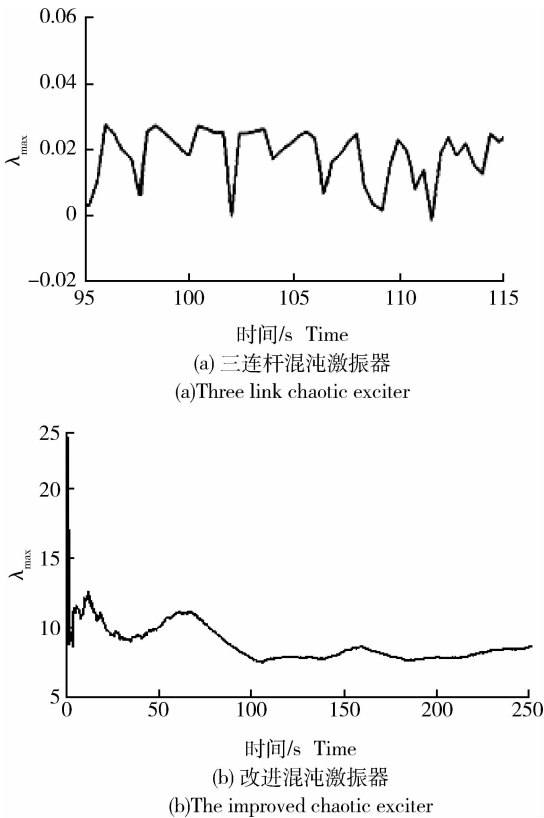


图 3 最大 Lyapunov 指数 ( $\lambda_{max}$ ) 的时间曲线图

Fig. 3 The  $\lambda_{max}$  curve respect to time

责任编辑：刘迎春