

求解任意多边形区域二维偏微分方程的小波精细积分法

德淑敏¹ 黄成² 梅树立¹

(1. 中国农业大学 信息与电气工程学院, 北京 100083; 2. 上海师范大学 基建规划处, 上海 201418)

摘要 张量积小波数值方法具有自适应性和较高的精度,但只适合求解定义在矩形区域的偏微分方程。将小波精细积分法与虚拟区域法相结合,构造了一种求解定义在任意多边形区域的二维偏微分方程的新小波数值方法。小波函数的紧支撑性降低了虚拟区域法的计算工作量。该方法可为求解定义在不规则区域上的工程动力学模型提供参考。

关键词 小波; 精细积分; 虚拟区域; 偏微分方程

中图分类号 TN 911.73, O 351.2

文章编号 1007-4333(2007)03-0081-04

文献标识码 A

Wavelet precise integration method for 2D partial differential equations in polygon domain

De Shumin¹, Huang Cheng², Mei Shuli¹

(1. College of Information and Electrical Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China;

2. Department of Capital Project, Shanghai Normal University, Shanghai 201418, China)

Abstract The tensor wavelet numerical method possesses the self-adaptability and higher precision. But it is suitable to the problems only restricted to partial differential equations defined in rectangle domain. A kind of new wavelet numerical method for solving 2D partial differential equations in polygon domain is proposed. Based on the combination wavelet precise integration method with the fictitious domain method. In this method, the compact support property improves the calculation efficiency of the fictitious domain method, which is helpful to solving the dynamic model in engineering such as the rill erosion model.

Key words wavelet; precise integration method; fictitious domain; partial differential equation

大型结构工程、水土侵蚀^[1-2]等工程问题,可用偏微分方程来描述,而这些问题的计算区域往往是高维的、大范围的,其形态往往很不规则,给计算带来很大困难。对于定义在不规则区域的偏微分方程,常用的求解方法包括有限元方法^[3]、区域分解算法^[4]和虚拟区域法^[5]。

近年来将小波函数与传统的数值方法相结合,出现很多数值性能优越的新算法^[6],其中小波数值方法中小波配置法最为简单、成熟。采用小波配置法求解二维偏微分方程时,通常利用一维小波函数通过张量积的形式构造逼近二元函数的基函数,又称张量积小波;而张量积小波配置法一般只适

合求解定义在矩形区域的偏微分方程^[7-8]。因此本文中尝试将虚拟区域法与小波精细积分方法相结合,构造求解任意多边形区域的偏微分方程的小波配置法。

1 偏微分方程的小波精细积分法

1.1 拟 Shannon 小波及其特性

拟尺度函数^[9]定义为

$$\phi(x) = \frac{\sin(\frac{x}{2})}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (x > 0)$$

式中 α 为窗口大小参数。考虑一维函数 $f(x) (x \in [a, b])$, 则变量 x 的离散点定义为

收稿日期: 2006-11-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372036); 中国农业大学科研启动基金(2005037)

作者简介: 德淑敏, 副教授, 主要从事波分析及其应用研究, E-mail: shumin.de@gmail.com; 梅树立, 副教授, 博士, 通讯作者, 主要从事小波分析与图像处理研究, E-mail: meishuli@163.com

$$x_n = a + \frac{b-a}{2^j} n \quad (j \in \mathbf{Z}; n = 0, 1, 2, \dots, 2^j)$$

由此可得到拟尺度函数 $w(x)$ 的离散形式

$$\phi_j(x - x_n) = \left[\sin \frac{2^j}{b-a} (x - x_n) \right] \cdot \left[\frac{2^j}{b-a} (x - x_n) \right]^{-1} \exp \left[-\frac{2^{j-1} (x - x_n)^2}{r^2 (b-a)^2} \right]$$

式中 $r = 2^j / (b-a)$ 。函数 $w_j(x - x_n)$ 在离散点 x_k 处的一阶和二阶导数分别为

$$\phi_j(x_k - x_n) = \begin{cases} 0 & (k = n) \\ \frac{2^j \cos((k-n)\pi) \exp(-((k-n)^2/2r^2))}{(k-n)(b-a)} & (k \neq n) \end{cases}$$

$$\phi_j(x_k - x_n) = \begin{cases} -\frac{3 + 2r^2}{3r^2[(b-a)/2^j]^2} & (k = n) \\ -\frac{2 \cos((k-n)\pi) \exp(-((k-n)^2/(2r^2)))}{[(b-a)/2^j]^2} \cdot \left[\frac{1}{(k-n)^2} + \frac{2}{r^2} \right] & (k \neq n) \end{cases}$$

1.2 二维偏微分方程的小波配置法

设一元函数 $\phi_1(x)$ 生成一个多分辨分析 $\{V_{j,1}\}$, 而一元函数 $\phi_1(y)$ 生成另一个多分辨分析 $\{V_{j,2}\}$, 则 $V_{j,1}$ 与 $V_{j,2}$ 的张量积空间

$$V_j = V_{j,1} \otimes V_{j,2}$$

由于 $V_{j,1}$ 的基底是 $\{\phi_1(2^{-j}x - k)\}$, 而 $V_{j,2}$ 的基底是 $\{\phi_2(2^{-j}x - l)\}$, 所以 V_j 的基底是 $\{\phi_1(2^{-j}x - k) \cdot \phi_2(2^{-j}x - l)\}$ 。

对于二元函数 $f(x, y)$, 引入记号

$$\phi(x, y) = \phi(x) \phi(y)$$

则 $\{\phi_{j,k,l}(x, y) : k, l \in \mathbf{Z}\}$ 是 V_j 的基底; 所以 $\{V_j\}$ 形成 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一个多分辨分析, 而 $\phi(x, y)$ 是相应的尺度函数。

设二维偏微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \\ u(x, y, t) = 0 \quad ((x, y) \in \partial) \end{cases} \quad (1)$$

偏微分方程的解可近似表示为

$$\tilde{u}_j(x, y) = \sum_{n_1=0}^{2^j} \sum_{n_2=0}^{2^j} \tilde{u}_j(x_{n_1}, y_{n_2}) \phi_{j;n_1,n_2}(x, y) \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)可得其小波离散格式

$$\sum_{n_1=0}^{2^j} \sum_{n_2=0}^{2^j} \tilde{u}_j(x_{n_1}, y_{n_2}) \left[\frac{\partial^2 \phi_{j;n_1,n_2}(x_{k_1}, y_{k_2})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{j;n_1,n_2}(x_{k_1}, y_{k_2})}{\partial y^2} \right] = \frac{d u_j(x_{k_1}, y_{k_2})}{d t}$$

$$k_1 = 0, 1, 2, \dots, 2^j, k_2 = 0, 1, 2, \dots, 2^j, j \in \mathbf{Z} \quad (3)$$

$$V_j =$$

$$(u_j(x_0, y_0, t), u_j(x_1, y_0, t), \dots, u_j(x_{2^j}, y_0, t), u_j(x_0, y_1, t), u_j(x_1, y_1, t), \dots, u_j(x_{2^j}, y_1, t), \dots, u_j(x_0, y_{2^j}, t), u_j(x_1, y_{2^j}, t), \dots, u_j(x_{2^j}, y_{2^j}, t))^\top$$

$$W = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \dots & w_{0,2^j} \\ w_{1,0} & w_{1,1} & \dots & w_{1,2^j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{2^j,0} & w_{2^j,1} & \dots & w_{2^j,2^j} \end{bmatrix}$$

$$W_{n_1, n_2} = \begin{bmatrix} m_{n_1, n_2}^{0,0} & m_{n_1, n_2}^{0,1} & \dots & m_{n_1, n_2}^{0,2^j} \\ m_{n_1, n_2}^{1,0} & m_{n_1, n_2}^{1,1} & \dots & m_{n_1, n_2}^{1,2^j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n_1, n_2}^{2^j,0} & m_{n_1, n_2}^{2^j,1} & \dots & m_{n_1, n_2}^{2^j,2^j} \end{bmatrix}$$

$$m_{n_1, n_2}^{k_1, k_2} = \frac{\partial^2 \phi_{j;n_1,n_2}(x_{k_1}, y_{k_2})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{j;n_1,n_2}(x_{k_1}, y_{k_2})}{\partial y^2}$$

于是方程组(3)可简记为以下矩阵形式

$$\frac{d}{d t} V_j = W V_j \quad (4)$$

方程组(4)的解可表示为

$$V_{j, k+1} = T \times V_{j, k} \quad (5)$$

其中

$$T = \exp(M_0 \cdot \tau)$$

式中 τ 为时间步长。这样, 问题就归结为 T 的计算, 而矩阵 T 可通过精细积分方法^[4]精确求得。

2 多边形区域偏微分方程的小波精细积分法

考虑椭圆型方程

$$\begin{cases} L u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + d(x) u = f(x) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial \Omega \end{cases} \quad (6)$$

这里 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是有界开集, $[a_{ij}]$ 是对称一致正定矩阵, $d(x) \geq 0, x \in \Omega$ 。

假定 Ω 是不规则的区域, 现在考虑规则域

$\Omega \supseteq \Omega_0$, 用 Ω_0 上的边值问题代替 Ω 上的边值问题。用 $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_0$ 表示 Ω 上的补集。为了使 Ω_0 上边值问题的解与 Ω 上边值问题的解近似, 基于物理上的解释, 扩张后微分算子的系数在 Ω_2 上应充分大。因此可考虑将式(6)用以下 Ω_0 上的边值问题代替

$$\begin{cases} L v = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} + D(x)v = F & x \in \Omega_0 \\ v = 0 & x \in \partial \Omega_0 \end{cases} \quad (7)$$

式中

$$A_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij}(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \Omega_2, i \neq j \\ -2 & x \in \Omega_2, i = j \end{cases}$$

$$D(x) = \begin{cases} d(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

以及在界面 $S = \partial \Omega_0 \setminus \partial \Omega$ 上要求成立

$$\begin{cases} [v(x)]_S = 0 \\ \left[\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \cos(\nu, x_i) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right]_S = 0 \end{cases}$$

这里 $[v]_S$ 表示函数越过界面 S 的跳跃, 而 ν 是 S 的法向向量。该条件是自然边界条件。

这样, 多边形区域的偏微分方程便转化为矩形区域偏微分方程的求解问题, 直接采用小波精细积分法便可求得。

3 数值算例

例 1 使用虚拟区域技术求解简单的 2D 问题(图 1)。指定 $\Omega = [1, 2] \times [1, 2]$, $\Omega_0 = [0, 3] \times [0, 3]$ 。微分方程为

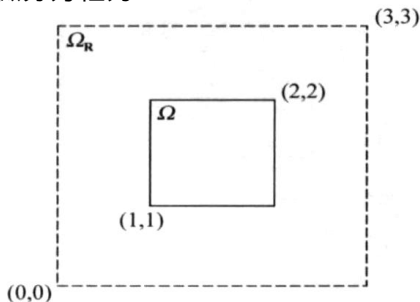


图 1 计算区域 Ω 和虚拟区域 Ω_0 示意图

Fig. 1 Geometry of computational domain Ω and the fictitious domain Ω_0

$$-\Delta u = f \text{ on } \Omega, u = 0 \text{ on } \partial \Omega \quad (8)$$

其对应的变分公式为

$$\int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial \Omega_0} u v = \int_{\Omega} \tilde{f} v \quad (9)$$

其中 \tilde{f} 是 f 到区域 Ω_0 的延伸。对应的线性系统为

$$Ax + \mathbf{1} Mx = b \quad (10)$$

其中 A 是循环矩阵, M 对应于边界积分。使用 5 层离散, 即 $h = 2^{-5}$, 方程右边等于

$$f(x, y) = 8^2 \sin x \sin y \quad (11)$$

计算结果见图 2。可以看出, 采用虚拟区域法可以有效控制区域 $\Omega \setminus \Omega_0$ 部分的数值, 使结果近似为 0。该方法的误差曲面见图 3。可以看出, 误差主要集中在区域的边界附近, 这主要是因为随着 h 值的减小, 对应区域 $\Omega \setminus \Omega_0$ 内矩阵 A 元素的值很大, 这导致整个矩阵几乎是奇异的, 从而导致线性方程组的解的误差较大。随着配点数量的增加, 误差相应减小。

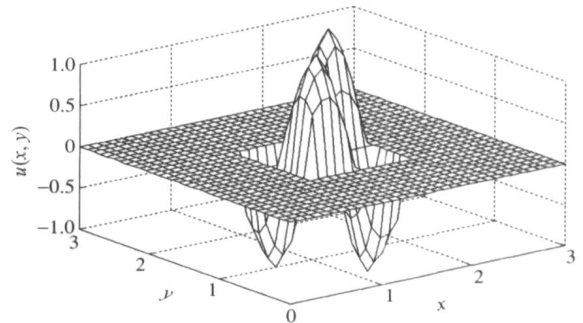


图 2 采用虚拟区域法得到的椭圆方程(8)数值结果曲面 ($j = 5, \nu = 0.1$)

Fig. 2 Curved surface of 2D Elliptic equation(8) by the fictitious domain method

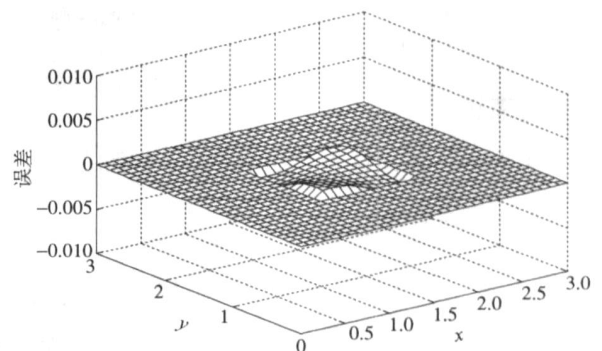


图 3 虚拟区域法计算椭圆型方程(8)的误差曲面

Fig. 3 Numerical error curved surface gained from calculation of elliptic equation (8) by the fictitious domain method

例 2 三角形区域热传导方程的求解。

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \\ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y, t) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}, \quad (12)$$

初始条件为

$$u(x, y, 0) = 1 \quad (13)$$

其中 Ω 是三角形区域(图4)。采用虚拟区域法所得结果见图5。由此可见,虚拟区域法也可应用于抛物型偏微分方程的求解。

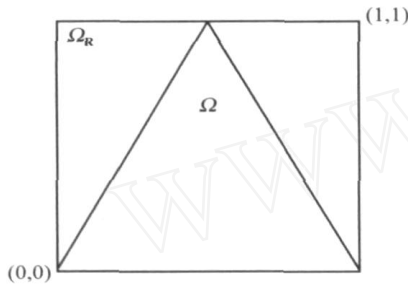


图4 热传导方程(12)的定义域和虚拟域示意图

Fig. 4 Defining domain and fictitious domain of heat conduction equation (12)

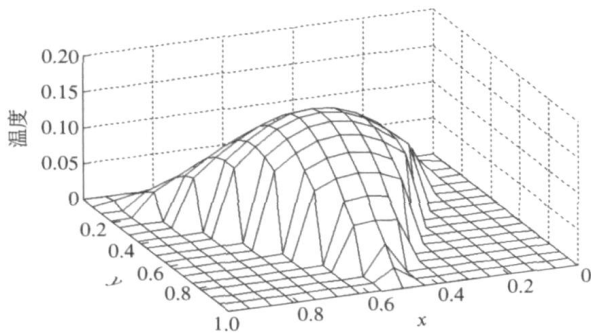


图5 三角形区域热传导方程(12)的数值计算结果($t=0.1$)

Fig. 5 Numerical result of heat-conduction equation (12) defined on triangle domain

4 结束语

引入虚拟区域法,将求解偏微分方程的小波精

细积分法的应用范围由原来的矩形区域扩大到任意多边形区域,从而使小波精细积分法可应用于不规则区域上的工程模型求解。不规则的边界可以来源于图像或通过分形计算机图形学的模型模拟生成,但无论哪种方法得到的边界,都可以通过小波变换来自动识别,从而可以用来求解具有更为复杂的边界的模型,这也是笔者正在研究的课题。

参 考 文 献

- [1] Hafzullah A, Kavvas M L. A review of hillslope and watershed scale erosion and sediment transport models[J]. Catena, 2005, 64, 247-271
- [2] Joris D, Vente T, Jean P. Predicting soil erosion and sediment yield at the basin scale: Scale issues and semi-quantitative models[J]. Earth Science Reviews, 2005, 71:95-125
- [3] Bernardi C, Girault V, Hecht F, et al. A finite element problem issued from fictitious domain techniques [J]. East-West J Numer Math, 2001, 9 (4): 253-263
- [4] 吕涛,石济民,林振宝. 区域分解算法—偏微分方程数值解新技术[M]. 北京: 科学出版社, 1992: 312-316
- [5] Girault V, Glowinski R. Error analysis of a fictitious domain method applied to a dirichlet problem[J]. Japan J Indust Appl Math, 1995,12: 487-514
- [6] Dahmen W. Wavelet methods for PDEs—Some recent developments[J]. J Comput Appl Math, 2001, 128: 133-185
- [7] 庞守林,梅树立. 水土侵蚀过程分析的小波精细积分法[J]. 农业机械学报, 2006, 37(10): 124-126
- [8] 张兰霞,杨勇,梅树立. 图像降噪的小波精细积分法[J]. 农业机械学报, 2006, 37(7): 124-126
- [9] Wei G W. Quasi wavelet and quasi interpolating wavelets [J]. Chemical Physics Letters, 1998, 296: 215-222