中国农业大学学报 2006,11(3):109-112
Journal of China Agricultural University

# 二阶 $m$ 点边值问题的多个正解存在性

江卫华[1] 郭彦平[1] 陈 静[2]
(1. 河北科技大学 理学院,石家庄 050018;2. 中国农业大学 理学院 北京 100083)

**摘 要** 利用 Leggett-Williams 不动点定理,并赋予 $f$ 一定的增长条件,证明了二阶微分方程多点边值问题

$$\begin{cases} u''+f(t,u)=0 & 0\le t\le 1 \\ u(0)=0 & u(1)-\sum_{i=1}^{m-2}k_i u(\xi_i)=0 \end{cases}$$

至少存在 3 个正解,其中 $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的,$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$。同时给出了该边值问题相应的 Green 函数。

**关键词** Leggett-Williams;不动点定理;锥;正解;多点边值问题
**中图分类号** O 175.8 **文章编号** 1007-4333(2006)03-0109-04 **文献标识码** A

# Existence of multiple positive solution for a second-order multiple-point boundary value problem system

Jiang Weihua[1], Guo Yanping[1], Chen Jing[2]
(1. College of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050018, China;
2. College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract For a second-order multiple-point boundary value problem system, such as

$$\begin{cases} u''+f(t,u)=0 & 0\le t\le 1 \\ u(0)=0 & u(1)-\sum_{i=1}^{m-2}k_i u(\xi_i)=0 \end{cases}$$

where $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ is continuous and $0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$, growth conditions are imposed on f, which yields the existence of at least three positive solutions by the Leggett-Williams fixed point theorem. The associated Green function for above problem is also given.

Key words Leggett-Williams fixed point theorem; cone; positive solution; multiple-point boundary value problem system

常微分方程的多点边值问题出现在应用数学和应用物理的许多领域中。1987 年 Il'in 和 Moiseev[1]首先对二阶线性常微分方程的多点边值问题进行了研究,此后,出现了许多关于非线性多点边值问题的研究成果[2-6],文献[5]利用双锥上的不动点定理证明了二阶三点边值问题

$$\left.\begin{aligned} &u''(t)+a(t)f(u)=0 \\ &u(0)=0 \quad u(1)-\alpha u(\eta)=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

至少存在 2 个正解,其中 $\alpha>0$,$0<\eta<1$,$a\in C([0,1],[0,\infty))$,$f\in C([0,\infty),[0,\infty))$。文献[6]利用 Shauder 不动点定理讨论了二阶 $m$ 点边值问题

$$\left.\begin{aligned} &u''+f(t,u)=0 \quad 0\le t\le 1 \\ &u(0)=0 \quad u(1)-\sum_{i=1}^{m-2}k_i u(\xi_i)=b \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

正解的存在性与 $b$ 的取值有关,并证明了存在 $b^*$,当 $0<b<b^*$ 时式(2)有正解,当 $b>b^*$ 时没有正解,此处 $k_i>0(i=1,2,\cdots,m-2)$,$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$。

收稿日期:2005-12-05
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10371030,60573158);河北省自然科学基金资助项目(A2006000298)
作者简介:江卫华,副教授,主要从事应用泛函分析、常微分方程边值问题研究,E-mail:weihuajiang@hebust.edu.cn

关于二阶多点边值问题

$$\left.\begin{aligned} & u''+f(t,u)=0 \quad 0\le t\le 1 \\ & u(0)=0 \quad u'(1)-\sum_{i=1}^{m-2}k_i u'(\xi_i)=0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中 $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续，$k_i>0\ (i=1,2,\cdots,m-2)$，$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$ 的正解存在性的研究未见报道。笔者利用 Leggett-Williams 不动点定理，并赋予 $f$ 一定的增长条件，讨论了问题(3)正解的存在性。

## 1 预备知识

**定义** 设 $0<a<b$ 为常数，$\alpha$ 是 $K$ 上的非负连续凹泛函，定义凸集 $P_r$ 和 $P(\alpha,a,b)$ 为

$$P_r=\{x\in K|\ \|x\|<r\}$$

$$P(\alpha,a,b)=\{x\in K|\ a\le\alpha(x),\ \|x\|\le b\}$$

**定理 1** (Leggett-Williams 不动点定理[7]) 设 $A:\overline{P_c}\to\overline{P_c}$ 是全连续算子，$\alpha$ 是 $K$ 上的非负连续凹泛函，且对任意 $x\in\overline{P_c}$，$\alpha(x)\le\|x\|$，又设存在 $0<a<b<d\le c$，使得：

1) $\{x\in P(\alpha,b,d)\,|\,\alpha(x)>b\}\ne\phi$，且对 $x\in P(\alpha,b,d)$，$\alpha(Ax)>b$；2) 对 $\|x\|\le a$ 有 $\|Ax\|<a$；3) 对 $x\in P(\alpha,b,c)$ 且 $\|Ax\|>d$ 有 $\alpha(Ax)>b$。则至少存在 3 个不动点 $x_1$、$x_2$ 和 $x_3$，使得 $\|x_1\|<a$，$b<\alpha(x_2)$，$a<\|x_3\|$，$\alpha(x_3)<b$。

**引理 1** 假设 $\sum_{i=1}^{m-2}k_i\ne 1$，如果 $y(t)\in C[0,1]$，则边值问题

$$\left.\begin{aligned} & u''+y(t)=0 \quad 0\le t\le 1 \\ & u(0)=0 \quad u(1)-\sum_{i=1}^{m-2}k_i u'(\xi_i)=0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

有唯一解

$$u(t)=-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{t}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i}\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s-\frac{t}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i}\sum_{i=1}^{m-2}\int_0^{\xi_i}y(s)\mathrm{d}s$$

**证明** 由式(4)有

$$u''(t)=-y(t)$$

对 $t\in[0,1]$，从 0 到 $t$ 积分，得

$$u'(t)=-\int_0^t y(s)\mathrm{d}s+u'(0) \tag{5}$$

对 $t\in[0,1]$，对式(5)再从 0 到 $t$ 积分

$$u(t)=-\int_0^t\left(\int_0^x y(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x+u'(0)t$$

即

$$u(t)=-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s+u'(0)t$$

由式(5)得

$$u'(1)=-\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s+u'(0)$$

$$u'(\xi_i)=-\int_0^{\xi_i}y(s)\mathrm{d}s+u'(0) \quad i=1,2,\cdots,m-2$$

由式(4)有

$$-\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s+u'(0)-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\left(-\int_0^{\xi_i}y(s)\mathrm{d}s+u'(0)\right)=0$$

即

$$\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\right)u'(0)=\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{m-2}k_i\int_0^{\xi_i}y(s)\mathrm{d}s$$

因此

$$u'(0)=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i}\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i}\sum_{i=1}^{m-2}k_i\int_0^{\xi_i}y(s)\mathrm{d}s$$

所以式(4)有唯一解

$$u(t)=-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{t}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i}\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s-\frac{t}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i}\sum_{i=1}^{m-2}k_i\int_0^{\xi_i}y(s)\mathrm{d}s$$

**引理 2** 设 $0<\sum_{i=1}^{m-2}k_i<1$，$y(t)\in C[0,1]$ 且 $y(t)\ge 0$，则式(4)的唯一解 $u(t)$，满足 $u'(t)\ge 0$，其中 $0\le t\le 1$。

**证明** 由引理 1 得

$$u'(t)=-\int_0^t y(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i}\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}k_i}\sum_{i=1}^{m-2}k_i\int_0^{\xi_i}y(s)\mathrm{d}s\ge -\int_0^t y(s)\mathrm{d}s+\int_0^1 y(s)\mathrm{d}s\ge 0$$

**引理 3** 边值问题

$$
\left.\begin{aligned}
& -u''=0 \quad 0\le t\le 1\\
& u(0)=0 \quad u'(1)-\sum_{i=1}^{m-2}k_i u'(\xi_i)=0
\end{aligned}\right\} \tag{6}
$$

的 Green 函数为

$$
G(t,s)=\begin{cases}
s+\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{l-1}k_j}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i}t & 0\le t\le 1,\ \xi_{l-1}\le s\le \min\{\xi_l,t\},\ l=1,2,\cdots,m-1\\[2ex]
\dfrac{1-\sum\limits_{j=l}^{m-2}k_j}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i}t & 0\le t\le 1,\ \max\{\xi_{l-1},t\}\le s\le \xi_l,\ l=1,2,\cdots,m-1
\end{cases}
$$

**证明**　对 $0\le t\le \xi_1$,式(4)的唯一解可表示为

$$
u(t)=\int_0^t sy(s)\,\mathrm{d}s+\int_t^{\xi_1}ty(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=2}^{m-2}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\frac{1-\sum\limits_{j=i}^{m-2}k_j}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i}ty(s)\,\mathrm{d}s+\int_{\xi_{m-2}}^{1}\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i}ty(s)\,\mathrm{d}s
$$

对 $\xi_{r-1}\le t\le \xi_r,2\le r\le m-2$,式(4)的唯一解可表示为

$$
\begin{aligned}
u(t)=&\int_0^{\xi_1}sy(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=2}^{r-1}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\left(s+\frac{\sum\limits_{j=1}^{i-1}k_j}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i}t\right)y(s)\,\mathrm{d}s+\int_{\xi_{r-1}}^{t}\left(s+\frac{\sum\limits_{j=1}^{r-1}k_j}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i}t\right)y(s)\,\mathrm{d}s+\\
&\int_t^{\xi_r}\frac{1-\sum\limits_{j=r}^{m-2}k_j}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i}ty(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=r+1}^{m-2}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\frac{1-\sum\limits_{j=i}^{m-2}k_j}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i}ty(s)\,\mathrm{d}s+\int_{\xi_{m-2}}^{1}\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i}ty(s)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

对 $\xi_{m-2}\le t\le 1$,式(4)的唯一解可表示为

$$
\begin{aligned}
u(t)=&\int_0^{\xi_1}sy(s)\,\mathrm{d}s+\sum_{i=2}^{m-2}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\left(s+\frac{\sum\limits_{j=1}^{i-1}k_j}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i}t\right)y(s)\,\mathrm{d}s+\\
&\int_{\xi_{m-2}}^{t}\left(s+\frac{\sum\limits_{j=1}^{m-2}k_j}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i}t\right)y(s)\,\mathrm{d}s+\int_t^1\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i}ty(s)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

所以式(4)的唯一解为 $u(t)=\int_0^1 G(t,s)y(s)\,\mathrm{d}s$。引理 3 证毕。

**引理 4**　假设 $0<\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i<1$,边值问题(3)中如果 $y(t)\in C(0,1)$,并且在 $(0,1)$ 上,$y(t)\ge 0$,则式(4)的唯一解 $u(t)$ 满足:1) $u(t)\ge 0,0\le t\le 1$;2) $\inf\limits_{t\in[\xi_1,1]}u(t)\ge \xi_1\|u\|$。

**证明**　由 $u(t)$ 的凹性及单调非减性易知结论成立。

本研究假设如下条件成立:

**i**　$k_i>0(i=1,2,\cdots,m-2)$,$0=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_{m-1}=1$,$0<\sum\limits_{i=1}^{m-2}k_i<1$;

**ii**　$f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续。

显然,$G(t,s)\ge 0$,并且 $\mathrm{mes}\{t,s)\in[0,1]\times[0,1]\mid G(t,s)=0\}=0$。令

$$
m=\min_{t\in[\xi_1,1]}\int_{\xi_1}^1 G(t,s)\,\mathrm{d}s=\int_{\xi_1}^1 G(\xi_1,s)\,\mathrm{d}s
$$

$$
M=\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)\,\mathrm{d}s=\int_0^1 G(1,s)\,\mathrm{d}s
$$

易见 $0<m<M$。设 $E=C[0,1]$,并且定义 $E$ 上锥 $K=\{u\in E\mid u$ 是 $[0,1]$ 上非负单调不减凹函数$\}$。

最后在 $K$ 上定义非负连续的凹泛函 $\alpha(u)=\min\limits_{t\in[\xi_1,1]}u(t)=u(\xi_1)$。显然,对任意 $u\in K,\alpha(u)\le\|u\|$。

## 2　主要结果

**定理 2**　假设上面的条件 i 和 ii 成立,另假设存在非负数 $a$、$b$ 和 $c$,使得 $0<a<b<d=\dfrac{b}{\xi}\le\min$

$\left\{1, \frac{m}{M\xi_1}\right\} c$，并且 $f(t, u)$ 满足如下增长条件：

iii $f(t, u) \le \frac{c}{M}, (t, u) \in [0,1] \times [0, c]$；

iv $f(t, u) \le \frac{a}{M}, (t, u) \in [0,1] \times [0, a]$；

v $f(t, u) \le \frac{b}{m}, (t, u) \in [\xi_1, 1] \times [b, d]$。

则边值问题(3) 至少存在 3 对正解 $u_1, u_2, u_3$ 使得：$\| u_1 \| < a, \min_{t \in [\xi_1, 1]} u_2(t) > b, \| u_3 \| > a, \min_{t \in [\xi_1, 1]} u_3(t) < b$。

证明 定义 $K$ 上算子 $A$ 为

$$Au(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) \mathrm{d}s$$

首先证明 $A: K \to K$ 是全连续算子。由 $G(t, s)$ 的性质可知：$(Au)''(t) = - f(t, u(t)) \le 0$，$(Au)'(t) \ge 0$，$Au(t) \ge 0$，因此，$A: K \to K$。如果 $u \in \overline{P_c}$，则 $\| u \| \le c$，$t \in [0,1]$，由条件 iii可得

$$\| Au \| = \max_{t \in [0,1]} | Au(t) | = \left| \int_0^1 G(1, s) f(s, u(s, u(s)) \mathrm{d}s \right| \le \frac{c}{M} \int_0^1 G(1, s) \mathrm{d}s = c$$

从而 $A: \overline{P_c} \to \overline{P_c}$。由 $f$ 的连续性及 Arzela-Ascoli 定理知，$A$ 是 $K$ 上的全连续算子。由 iv类似可以证明定理 1 的条件 1) 成立。

其次证明定理 1 的 2) 成立。显然

$$\{ u \in P(\alpha, b, d) | \alpha(u, v) > b\} \ne \phi$$

是成立的，如果 $u \in P(\alpha, b, d)$，那么对 $s \in [\xi_1, 1]$ 有 $b \le u(s) \le d$，由 v可得

$$\alpha(Au) = \min_{t \in [\xi_1, 1]} \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) \mathrm{d}s = \int_0^1 G(\xi_1, s) f(s, u(s)) \mathrm{d}s > \int_{\xi_1}^1 G(\xi_1, s) f(s, u(s), v(s)) \mathrm{d}s \ge \frac{b}{m} \int_{\xi_1}^1 G(\xi_1, s) \mathrm{d}s = b$$

最后证明定理 1 的 3) 成立。如果 $u \in P(\alpha, b, c)$，且 $\| Au \| > d$ 则有

$$\alpha(Au) = \min_{t \in [\xi_1, 1]} Au(t) \ge \xi_1 \| Au \| > \xi_1 d = b$$

定理 1 的条件全部满足，所以边值问题(3) 至少有 3 个不动点 $u_1, u_2, u_3$ 满足：$\| u_1 \| < a, \min_{t \in [\xi_1, 1]} u_2(t) > b, \| u_2 \| > a, \min_{t \in [\xi_1, 1]} u_3(t) < b$。

定理 2 证明完毕。

## 参 考 文 献

[1] Il'in V A, Moiseev E I. Nonlocal boundary value problem of the second kind for a Sturm-Liouville operator[J]. Different Eqs, 1987, 23(8): 979-987

[2] Gupta C P. A generalized multi-point boundary value problem for second order ordinary differential equations [J]. Applied Math Comput, 1998, 89: 133-146

[3] Ma Ruyan. Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem. E-lectronic[J]. Journal of Differential Equations, 1999, 34: 1-8

[4] Ma Ruyan. Positive solutions for second order three-point boundary value problems[J]. Applied Mathematics Letters, 2001, 14: 1-5

[5] 郭彦平，葛渭高，董士杰. 具有变号非线性项的二阶三点边值问题的两个正解[J]. 应用数学学报，2004, 27 (3): 522-529

[6] Guo Yanping, Shan Wenrui, Ge Weigao. Positive solutions for second-order -point boundary value problems[J]. J Comput Appl Math, 2003, 151: 415-424

[7] Leggett R W, Williams L R. Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces [J]. Indiana Univ Math J, 1979, 28: 673-688