

# 对 ANSYS 的 Link8 杆单元的几何非线性性能的评述

徐巍 周<sup>✉</sup>

(中国农业大学 理学院, 北京 100083)

**摘要** 为研究 ANSYS 的几何非线性性能,将杆的有限变形理论与 ANSYS 的样板单元 Link8 单元的几何非线性理论进行对比。采用能反映杆的几何非线性的跃变结构算例,对有限变形理论的杆单元与 Link8 单元的计算结果进行比较,结果表明:ANSYS 的大变形计算只是一种近似的几何非线性计算,其平衡方程式是不精确的,其计算结果也是不精确的。

**关键词** 有限变形; 杆单元; ANSYS

中图分类号 O 241

文章编号 1007-4333(2005)03-0111-04

文献标识码 A

## Review on geometric non-linear performance of ANSYS 'Link8 element

Xu Wei, Zhou Zhe

(College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

**Abstract** In order to study the geometric non-linear performance of ANSYS, a comparison was made between the finite deformation theory of rod and the geometric non-linear theory of ANSYS Link8 element. An example of the geometric non-linear rod structure was taken to compare the computation results from the finite deformation theory and ANSYS Link8 element. The results showed that the results from the finite deformation theory were more valid than those from ANSYS Link8 element.

**Key words** finite deformation; rod element; ANSYS

有限变形理论是一种精确的几何非线性理论,已经发展到完全实用化的阶段,但目前流行的大型通用软件中,能够真正完全符合有限变形理论的很少见到。ANSYS 是一个在我国有众多用户、可提供二次开发的软件包。它的 Link8 单元在其发行软件包中提供了源代码,为用户开发程序提供了一个范例。作为 ANSYS 的样板单元,Link8 单元支持 ANSYS 单元所能拥有的大部分特性,包括几何非线性、材料非线性、热等特性<sup>[1]</sup>。本研究通过 Link8 单元的程序代码,从杆的有限变形理论角度指出其仅为一个采用近似几何非线性理论的单元,而不符合杆的有限变形理论。并通过算例说明采用有限变形理论计算的优越性。

### 1 杆单元的有限变形理论<sup>[2]</sup>

杆单元具有 2 个节点,每个节点 3 个位移自由

度( $u$ 、 $v$ 、 $w$ ),由于杆单元只承受轴向力,所以可能存在的应变为  $\epsilon_{11}$ 、 $\epsilon_{22}$  和  $\epsilon_{33}$ ,可能存在的应力分量为  $\sigma_{11}$ 、 $\sigma_{22}$  和  $\sigma_{33}$ ;但由于  $\epsilon_{22}$  和  $\epsilon_{33}$  为 0,用虚功原理建立平衡方程时,虽有  $\sigma_{22}$  和  $\sigma_{33}$ ,而只需考虑轴向应力  $\sigma_{11}$  和轴向应变  $\epsilon_{11}$ 。本研究中用  $(x, y, z)$  表示初始位形,则 Lagrange 应变为

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (1)$$

在有限变形理论中应变与应力的定义有很多种,但必须在满足能量共轭原理的前提下成对地使用,与 Lagrange 应变共轭的是第二 Piola-Kirchhoff 应力。当采用 Lagrange 应变和第二 Piola-Kirchhoff 应力,并且在全部计算中其参考位形永远取为初始位形时,这种方法称为 Total Lagrange 方法,简称 TL 方法。由于各种参变量的参考位形是初始位形,所以在 TL 方法中杆的横截面积不变,即为初始

收稿日期: 2004-10-22

作者简介: 徐巍,硕士研究生;周<sup>✉</sup>,副教授,主要从事固体力学研究, E-mail: fem@cau.edu.cn

面积  $A_0$ 。设本构关系为  $\epsilon_{11} = E \epsilon_{11}$ , 假设  $E$  在参考位形为初始位形中不变。根据虚功原理, 平衡状态时, 外力对物体虚位移做的虚功等于物体内力在虚变形上所做的虚功。外力虚功

$$W^{(e)} = \int_V f_i q_i dV + \int_A P_i q_i dA$$

内力虚功

$$W^{(i)} = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV$$

其中:  $q_i$  为虚位移;  $A$  和  $V$  为当前位形下物体的表面积和体积;  $f_i$  和  $P_i$  分别为体力 and 面力;  $\sigma_{ij}$  和  $\epsilon_{ij}$  分别为共轭的应力和虚应变张量。选取的应力应变对为第二 Piola-Kirchhoff 应力和 Lagrange 应变, 采用 TL 法计算。这样就可在此内力虚功的计算时将当前的未知积分域  $V$  转化为已知的初始积分域  $V_0$ 。

因为只需考虑轴向应力  $\sigma_{11}$  和轴向应变  $\epsilon_{11}$ , 所以杆单元内力虚功为

$$W^i = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \int_{V_0} S_{ij} \epsilon_{ij}^L dV_0 = \int_{V_0} S_{11} \epsilon_{11}^L dV_0$$

设  $\epsilon_{ij}^L$  为 Lagrange 应变,  $S_{ij}$  为第二 Piola-Kirchhoff 应力。定义

$$\mathbf{x} = [1 + u, x \quad v, x \quad w, x]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} x & & \\ & y & \\ & & z \end{bmatrix} \quad (3)$$

Lagrange 应变 为

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{I}$  为单位矩阵, 由式(4)得  $\epsilon_{11} = \frac{1}{2} (\epsilon_{xx}^T - 1)$ 。选取插值函数, 通过微分关系可得到

$$\epsilon_{xx} = \mathbf{H} \mathbf{q} \quad (5)$$

其中  $\mathbf{H}$  是由插值函数导数构成的矩阵, 定义

$$\mathbf{H} = \frac{1}{L_0} [\mathbf{I} \quad -\mathbf{I}] \quad (6)$$

其中:  $L_0$  为杆的原长;  $\mathbf{I}$  为  $3 \times 3$  单位矩阵。应变增

量为  $\epsilon_{11} = \frac{1}{2} (\epsilon_{xx}^T - 1) = \frac{1}{2} \epsilon_{xx}^T = \frac{1}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{q}$

$\mathbf{H}^T \mathbf{q}$ 。

定义  $\dot{\mathbf{B}}: \dot{\epsilon}_{11} = \dot{\mathbf{B}} \mathbf{q} = \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{q}$ , 则  $\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{H}}$ 。取位移  $\mathbf{q}$  为自变量, 杆的力平衡方程为

$$\dot{\mathbf{B}}^T dV - P = \int_{V_0} \mathbf{H}^T S_{11} dV_0 - P = 0 \quad (7)$$

通常采用牛顿迭代法解平衡方程(7)。

给定一试探位移  $\mathbf{q}$ , 并给增量位移  $\delta \mathbf{q}$ , 使其近似满足平衡方程, 则  $(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}) = (\mathbf{q}) + 0$ 。于是有不平衡力

$$= P - \int_{V_0} \mathbf{H}^T S_{11} dV_0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} W$$

可表达为

$$= P - EA_0 \epsilon_{11} L_0 \mathbf{H}^T \mathbf{x} \quad (8)$$

由式(7)得

$$= (\dot{\mathbf{B}}^T + \mathbf{B}^T) dV = (\mathbf{H}^T S_{11} + \mathbf{H}^T S_{11}) dV_0 \quad (9)$$

定义切线刚度矩阵  $\mathbf{k}_t = (\mathbf{k}_u + \mathbf{k}) \mathbf{q} = \mathbf{k}_t \mathbf{q}$ 。式(9)第1项  $(\mathbf{H}^T S_{11}) dV_0 = \mathbf{k} \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{k}$  通常称为初应力刚度矩阵或几何刚度矩阵, 表示在大变形情况下初应力对结构刚度的影响。式(9)第2项  $(\mathbf{H}^T S_{11}) dV_0 = \mathbf{k}_u \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{k}_u$  包括2部分: 一部分为通常情况下的位移刚度矩阵; 另一部分称为初位移刚度矩阵或大位移刚度矩阵, 表示大位移对结构刚度的影响。

设杆的 Kirchhoff 内力为  $N_k = S_{11} A_0$ , 则式(9)第1项:

$$(\mathbf{H}^T S_{11}) dV_0 = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{q} S_{11}) dV_0 =$$

$$\mathbf{q} (\mathbf{H}^T \mathbf{H} S_{11}) dV = \frac{N_k}{L_0} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{q}$$

初应力刚度矩阵:  $\mathbf{k} = \frac{N_k}{L_0} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{6 \times 6}$ ,  $\mathbf{I}$  为  $3 \times 3$  单位矩阵。式(9)第2项为

$$(\mathbf{H}^T S_{11}) dV_0 = EA_0 \frac{1}{L_0} \mathbf{H}^T \mathbf{x}^T \mathbf{H} d\mathbf{x} \mathbf{q} \quad (10)$$

将式(2)和式(6)代入式(10)得  $\mathbf{k}_u = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{M} \end{bmatrix}$ , 其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (1+u, x)^2 & (1+u, x) v, x & (1+u, x) w, x \\ (1+u, x) v, x & v, x^2 & v, x w, x \\ (1+u, x) w, x & v, x w, x & w, x^2 \end{bmatrix}$$

在 TL 法中, 由于计算都是定义在初始位形上的, 计算结果与步长无关, 所以在算法允许的情况下, 可以选取较大的步长来缩短计算时间, 而不会影响计算精度。

## 2 ANSYS 的 Link8 杆单元

图 1 示出 ANSYS 变形示意图。依据 ANSYS 文档<sup>[3]</sup>: 设物体上有 A、B 2 点, 变形前其连线平行于 x 轴, dS 为 A、B 2 点变形前的距离, ds 为变形后的距离, dq = (du, dv, dw), 有  $ds = \sqrt{(dS + du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2}$ 。

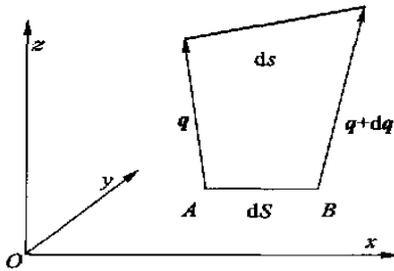


图 1 ANSYS 变形示意图

Fig. 1 Deformation in ANSYS

ANSYS 采用的应变定义为

$$\epsilon = \frac{ds}{dS} - 1 \quad (11)$$

$$\frac{ds}{dS} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}}{\sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}} \quad (12)$$

利用公式

$$\sqrt{1 + A} = 1 + \frac{A}{2} - \frac{A^2}{8} + \frac{A^3}{16} \dots \quad (13)$$

取式(13)前 2 项, 结合式(11)和(12)得

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] \quad (14)$$

ANSYS 中应变的定义式(14)与 Lagrange 应变式(1)从表现形式上完全一样, 但是所代表的含义却完全不同。在 ANSYS 中, 它是为了式(11)计算方便而采用的一种近似的定义, 对于 Link8 单元, 由于变形后单元长度能够精确计算出来, 因此取

$$\epsilon = \frac{L_t}{L_0} - 1 = \frac{L_t - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (15)$$

可以从下面 ANSYS 的 Link8 单元源代码<sup>[1]</sup>(右边括号中为笔者添加的注释)中得到。

```

c —compute original length (计算杆的初始长度 l0)
con = dist3d (xyz(1,1),xyz(1,2))
alenv = sqrt (con)
c —update the coordinates in a large deforma-

```

tion analysis (更新当前状态下节点的坐标)

```

call xyzup3 (2,u(1,putot),nr,xyz(1,1),6,xyzup(1,1))

```

c —compute and check current length (计算当前状态下杆的长度 L<sub>t</sub>)

```

con = dist3d (xyzup(1,1),xyzup(1,2))
aleng = sqrt (con)

```

```

call tranx3 (2,xyzup(1,1),3,tr(1,1))

```

(计算新的坐标变换矩阵,放入 tr 数组)

```

epel = aleng/alenv - 1.0d0

```

变 =  $\frac{L_t}{L_0} - 1$

在 TL 法中 Lagrange 应变是定义在初始位形上的,其参考位形不变,因此式(11)并不是 Lagrange 应变,而只是一种近似的定义,而且在 Link8 中实际上也没采用。

Link8 单元不平衡力的计算程序为:

Link8 单元的应力

```

c —update stress

```

```

sig = ex * epel (计算应力)

```

ex 为弹性模量, sig 为应力。

计算不平衡力

```

c —compute force

```

```

force = area * sig (计算杆的内力,

```

此时假设杆的面积(area)不变)

```

c —restoring force for newton raphson (计算不平衡力)

```

```

if (kelin(6).eq.1) then

```

```

vect(1) = force

```

```

vect(2) = 0.0d0

```

```

vect(3) = 0.0d0

```

```

call matxv (tr(1,1),vect(1),zscnr(4),3,3) (采用更新后的坐标变换矩阵进行坐标变换,从局部坐标转换为全局坐标)

```

```

zscnr(1) = - zscnr(4)

```

```

zscnr(2) = - zscnr(5)

```

```

zscnr(3) = - zscnr(6)

```

```

kelout(6) = 1

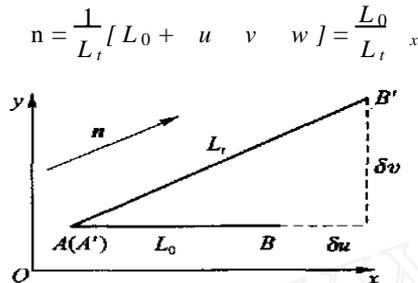
```

endif

从程序中可以看出:ANSYS 假设了与式(10)定义的 Link8 单元应变共轭的应力为 sig,并将当前杆的内力简单的取为 sig \* 初始面积,显然是错误的。

由式(4)可见当前杆的内力向量的一般表达式为

$\mathbf{B}^T dV$ 。在 TL 法中,杆的 Cauchy 内力由该表达式得到: $A_0 S_{11} L_0 \mathbf{H}^T_x$ ,为六维列向量,表示杆 2 节点所受力。2 节点所受力大小相等,方向相反,由  $\mathbf{H}$  的表达式可知杆的 Cauchy 内力为  $A_0 S_{11} \mathbf{x}$ ,其中  $S_{11}$  为杆的 Kirchhoff 应力,  $A_0 S_{11}$  为杆的 Kirchhoff 内力。另外从 Cauchy 应力与 Kirchhoff 应力的关系也可以得到相同的表达式。Cauchy 应力张量为  $\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$ ,其中  $J = V/V_0$ ,把式(3)代入得杆的 Cauchy 应力张量  $\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{x} S_{11} \mathbf{x}^T$ 。图 2 示出变形前后二维杆的方向,可见杆变形后横截面上的单位法向量为



AB 和 A'B' 分别为变形前、后的杆

图 2 变形前后二维杆方向示意图

Fig. 2 The direction of 2D rod before and after deformation

杆变形后横截面积为  $A_t$ ,杆的 Cauchy 内力向量为

$\mathbf{T}_n = A_t \mathbf{n} = A_t S_{11} \frac{A_0 L_0^2}{A_t L_t^2} \mathbf{x} \mathbf{x}^T$ 。由于  $\frac{A_0 L_0^2}{A_t L_t^2} = \frac{L_0^2}{L_t^2}$ ,所以  $\mathbf{T}_n = A_0 S_{11} \mathbf{x} \mathbf{x}^T$ ;而在 ANSYS 中,其参考位

形是初始位形, sig \* 初始面积的地位仅相当于 TL 法中杆的 Kirchhoff 内力,而不是杆的 Cauchy 内力。所以 ANSYS 的平衡方程式是不正确的。从这里可以得出结论:ANSYS 的大变形计算只是一种近似的几何非线性计算;而有限变形理论是一种精确的几何非线性理论,TL 法则基于有限变形理论没有采用任何近似计算的方法。

### 3 算例比较

以常用来说明几何非线性问题的跃变结构为例,用 ANSYS 单元和 TL 单元分别进行计算,对 2 种单元计算所得的 C 点位移进行比较。采用有限变形理论完整求解方法的具体介绍,及该算例的理

论解见文献[4]。为排除其他因素的干扰,将 TL 方法编写的单元作为一个用户自定义单元接入 ANSYS 中计算。选取 3 个点  $A(100,0,0)$ ,  $B(-100,0,0)$ ,  $C(0,10,0)$ 。A 点与 C 点、B 点与 C 点通过杆相连接,对 A 和 B 点的  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的位移约束为 0, C 点  $z$  方向的位移约束为 0。杆的横截面积为 1。弹性模量为  $2.0 \times 10^6$ 。施加 1 个  $-y$  方向力  $P$ 。ANSYS 用 1 个 Link8 单元模拟 1 根杆,TL 方法编写的单元也同样处理。

利用文献[4]得到的理论解代以相应的数据与本研究算得的数值结果完全一致。在该例子中,当载荷逐渐加大到某一值时,两杆会突然发生跃变,位移突然增大很多。文献[4]介绍方法计算出的跃变点的载荷  $P = 758.396026$ 。

表 1 示出采用 ANSYS 单元和 TL 单元的 C 点位移计算结果。可见,所加载荷远离跃变点时,ANSYS 单元计算结果与有限变形理论的计算结果比较接近,在跃变点附近计算结果相差很大,甚至出现不收敛的现象。

表 1 采用 ANSYS 单元和 TL 单元的 C 点位移计算结果  
Table 1 Computation results of displacement

载荷 $P$	ANSYS 单元	TL 单元
400	1.231 416 56	1.234 084 94
500	1.653 396 40	1.658 648 25
600	2.178 143 05	2.188 684 31
700	2.936 702 22	2.963 636 59
750	3.649 966 25	3.737 355 01
755	3.784 471 91	3.913 855 84
758	3.890 581 41	4.119 106 94
760	3.986 057 79	21.549 718 02
800	不收敛	21.616 824 03

### 4 结束语

在 ANSYS 的 Link8 杆单元中,对于大变形的计算只是采用了一种近似的几何非线性算法,其平衡方程式是不精确的,因此其计算结果也是不精确的。本研究基于精确的几何非线性理论即有限变形理论的 TL 方法编写的单元则可获得精确的计算结果,与理论解完全一致,并有下列特点:(1)不需要更新位形,一切计算均在初始位形上进行;(2)计算结果与载荷步数无关;(3)可以用较大载荷步计算,而结果不变,并可顺利地通过跃变点。

(下转第 120 页)

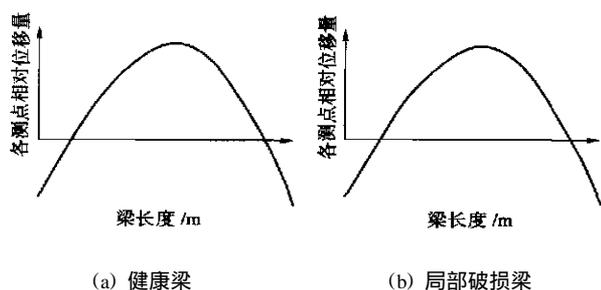


图9 实测的钢筋混凝土梁位移模态振型

Fig. 9 Measured displacement mode shape of RCB

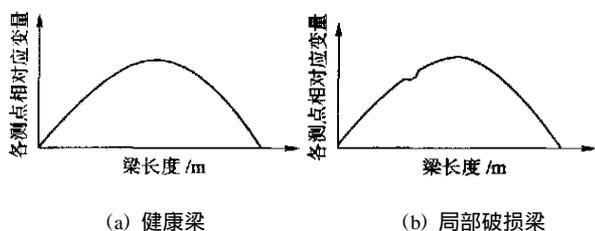


图10 实测的钢筋混凝土梁应变模态振型

Fig. 10 Measured strain mode shape of RCB

数值计算和实际测试结果(表3)都表明:混凝土局部脱落后,梁的固有频率明显下降,说明由于混凝土的局部脱落,引起梁模态刚度下降较为显著。因此,根据固有频率即可区分健康梁和局部破损梁。

健康梁和局部破损梁的位移模态振型曲线(图5和9)光滑连续,可见位移模态振型对于混凝土局部脱落这种损伤并不敏感;健康梁的应变模态振型和曲率模态振型曲线(图6和10)光滑连续,局部破损梁的应变模态振型和曲率模态振型在混凝土局部破损处发生了畸变,可见对于混凝土局部脱落这种损伤,应变模态振型或曲率模态振型较位移模态振型敏感。因此,局部破损梁可以通过应变模态振型或曲率模态振型对其局部破损位置进行定位辨识。

## 4 结论

1) 利用分离式有限元模型,可以计算钢筋混凝土健康梁和局部破损梁的振动特性参数;计算结果与实测结果一致。

2) 钢筋混凝土局部破损梁的固有频率较健康梁的低。在实际振动模态测试中,固有频率可作为钢筋混凝土梁损伤定性辨识的指标。

3) 曲率模态振型和应变模态振型是识别钢筋混凝土梁局部损伤的敏感参数,可以用来进行局部损伤的定位识别。

## 参考文献

- [1] 李国强,李杰. 工程结构动力检测理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2002. 1~250
- [2] 宋天霞,黄荣杰,杜太生. 钢筋混凝土非线性有限元及其优化设计[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2003. 79~230
- [3] 《振动与冲击手册》编辑委员会. 振动与冲击手册(第1卷):基本理论和分析方法[M]. 北京:国防工业出版社,1988. 142~206
- [4] 康清梁. 钢筋混凝土有限元分析[M]. 北京:中国水利水电出版社,1996. 5~250
- [5] 李人宪. 有限元法基础[M]. 北京:国防工业出版社,2002. 82~246
- [6] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社,2003. 15~326
- [7] Pandey A K, Biswas M, Samman M M. Damage detection from changes in curvature mode shapes[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 145(2):70~80
- [8] 王书茂,焦群英. 结构动力分析的实验应变模态法[J]. 北京农业工程大学学报,1993,13(4):93~98
- [9] 李德葆,陆秋海. 实验模态分析及其应用[M]. 北京:科学出版社,2001. 60~210

(上接第114页)

## 参考文献

- [1] ANSYS Inc. ANSYS documention 6.1-ANSYS element reference[OL]. <http://www.oulu.fi/>. 2004
- [2] 殷有泉. 固体力学非线性有限元引论[M]. 北京:北京大学出版社,清华大学出版社,1987. 122~202
- [3] ANSYS Inc. ANSYS documention 6.1-ANSYS, Inc. theory reference[OL]. <http://www.oulu.fi/>. 2004
- [4] 李明瑞,李进京. 一个经典的桁架跃变问题的解[J]. 力学与实践,1998(1):39~41