

# 混凝土应力图形简化对截面抗弯强度的影响

蒋秀根 剧锦三 王宏志

(中国农业大学 水利与土木工程学院, 北京 100083)

**摘要** 根据混凝土受压应力-应变关系的常用曲线方程,对受弯截面压区混凝土应力进行了矩形应力简化,推导得到了等效矩形应力图形高度及应力强度的一般公式。选取4种应力-应变关系模型,计算得到了矩形应力图形的简化结果,并分析了单筋截面不同模型的相对抗弯强度及其与GB 50010—2002《混凝土结构设计规范》(简称《规范》)建议值的相对误差。分析表明,不考虑混凝土受压的软化性能将过高估计截面的承载力,《规范》建议值导致截面抗弯强度计算值提高近5%,且在截面高配筋率下更为显著。

**关键词** 钢筋混凝土; 正截面; 应力图形

**中图分类号** TU 375.1

**文章编号** 1007-4333(2005)02-0085-05

**文献标识码** A

## Effect of simplified stress graph of concrete on bending strength of its cross-section

Jiang Xiugen, Ju Jinsan, Wang Hongzhi

(College of Water Conservancy and Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

**Abstract** According to the stress-strain curve equation of concrete compression, we simplified the rectangle stress graph of the stress on the area of its bending cross-section in this paper. A general formula for the height of equivalent compression stress block and the stress strength formula were deduced. Four kinds of stress-strain relations were used to calculate the rectangle stress block simplification results. The relative error between the bending strength of a rectangular section with tension reinforcement and that given in the code GB 50010—2002 was analyzed. The results showed that the flexural strength of a cross-section would be over-estimated when the soften character of concrete was ignored. The strength given in the Code is 5% higher than that from the calculation in this paper and further higher when the ratio of reinforcement is high.

**Key words** reinforced concrete; cross-section; stress graph

钢筋混凝土正截面的强度计算依赖于对压区混凝土应力的分析和简化。由于混凝土的非线性特性,为了方便工程应用,各国规范<sup>[1~2]</sup>中都对受压区混凝土的应力分布做了适当简化。将混凝土应力分布图形简化为矩形应力分布图形是最常用的一种方法,GB 50010—2002《混凝土结构设计规范》(以下简称《规范》)<sup>[3]</sup>和美国规范 ACI 2002 Code<sup>[2]</sup>均采用了此种方法。不同规范采取的应力-应变曲线及相应的变形参数不同,推荐的简化计算值<sup>[2~3]</sup>也不同。本文中对混凝土应力-应变关系中的主要参数进行

了对比分析,并探讨了不同模型对应力图形简化及截面抗弯强度的影响。

## 1 一般结论

### 1.1 基本假定

1) 平截面假定。假定受压区应变分布服从直线分布规律(对于非开裂截面,甚至可以扩展到整个截面),至中和轴距离为  $x$  点的混凝土应变

$$\epsilon_c(x) = (x/x_n) \epsilon_{cu} = (x/x_0) \epsilon_0 \quad (1)$$

式中:  $x_n$  为受压区高度;  $\epsilon_{cu}$  为截面破坏时受压区边

收稿日期: 2004-12-01

作者简介: 蒋秀根,副教授,主要从事结构工程方向的研究; 剧锦三,副教授,博士,通讯作者,主要从事结构稳定和断裂研究, E-mail: jujinsan@tsinghua.org.cn

缘的混凝土应变； $\epsilon_0$ 为有应变梯度下混凝土受压的峰值应变； $x_0$ 为峰值应变点坐标， $x_0 = (\epsilon_0 / \epsilon_{cu}) x_n$ 。

2)有应变梯度时混凝土受压应力-应变关系。与中心受压时类似，有应变梯度下混凝土受压的应力-应变曲线表现为典型的非线性，并且有明显的软化特性。在有应变梯度时，混凝土的应力-应变关系与中心受压时并不完全一致，试验结果表明，其峰值应力和峰值应变均大于中心受压时的对应值<sup>[1]</sup>。Hognestad模型较好地反映了混凝土受压时的基本特征，其曲线方程形式被多国混凝土设计规范所采用<sup>[4]</sup>。

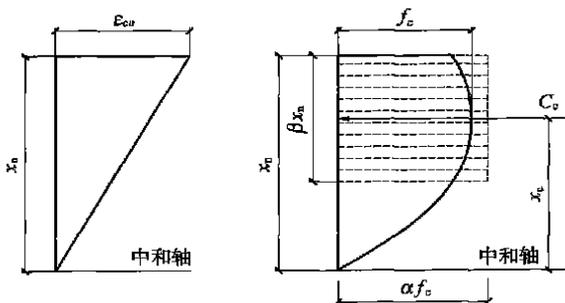
上升段：

$$c = \epsilon_0 [1 - (1 - \epsilon / \epsilon_0)^n] \quad (0 < \epsilon < \epsilon_0) \quad (2)$$

下降段：

$$c = \epsilon_0 [1 - m(\epsilon / \epsilon_0 - 1)] \quad (\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_{cu}) \quad (3)$$

式中： $c$ 、 $\epsilon$ 分别为混凝土的应力和应变， $\epsilon_0$ 为混凝土在应变梯度下的峰值抗压强度， $\epsilon_0$ 、 $\epsilon_{cu}$ 为混凝土的峰值应变和极限应变， $n$ 为上升段指数， $m$ 为下降段斜率系数。截面的应变和应力分布分别示于图1(a)和(b)。



(a) 受压区混凝土应变分布图 (b) 受压区混凝土实际应力分布及简化应力分布图

$x_n$ —实际受压区高度； $\beta x_n$ —名义受压区高度系数； $f_c$ —混凝土棱柱体抗压强度； $\alpha f_c$ —名义应力强度系数； $C_c$ —混凝土受压区总压力； $x_c$ —混凝土受压区压力合力作用点距中和轴距离； $\epsilon_{cu}$ —混凝土受压区边缘最大应变

图1 受压区混凝土应力、应变分布图

Fig. 1 Stress and Strain Distributions of Concrete in Compression Zone

### 1.2 压区合力

1)各点应力。基于截面受压区各点混凝土的应变公式(1)和混凝土的应力-应变关系式(2)和(3)，可以得到与中和轴距离为  $x$  的受压区混凝土各点的应力  $c(x)$ ：

$$\text{当 } 0 < x < x_0 \text{ 时, } c = \epsilon_0 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right)^n \right]$$

$$c(x) = \epsilon_0 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right)^n \right] \quad (4)$$

当  $x_0 < x < x_n$  时,  $c = \epsilon_0 \left[ 1 - m \left( \frac{x}{x_0} - 1 \right) \right]$

$$c(x) = \epsilon_0 \left[ 1 - m \left( \frac{x}{x_0} - 1 \right) \right] \quad (5)$$

2)合力大小。由式(4)和(5)通过积分可求得混凝土总压力

$$C_c = b \int_0^{x_n} c(x) dx = b \int_0^{x_0} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right)^n \right] dx + b \int_{x_0}^{x_n} \left[ 1 - m \left( \frac{x}{x_0} - 1 \right) \right] dx \quad (6)$$

对式(6)积分,可以得到

$$C_c = b \left[ x_0 - x_n \right] \left[ (1+m) - \frac{1}{n+1} \left( \frac{x_0}{\epsilon_{cu}} \right)^{n+1} - \frac{1}{2} m \left( \frac{x_0}{\epsilon_{cu}} + \frac{\epsilon_{cu}}{x_0} \right) \right] \quad (7)$$

3)合力中心至中和轴距离。混凝土压力合力中心至中和轴的距离  $x_c$ ,可以由等效力矩原理写出：

$$x_c = \frac{\int_0^{x_n} c(x) x dx}{\int_0^{x_n} c(x) dx} = \frac{b \int_0^{x_0} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right)^n \right] x dx + b \int_{x_0}^{x_n} \left[ 1 - m \left( \frac{x}{x_0} - 1 \right) \right] x dx}{b \int_0^{x_0} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right)^n \right] dx + b \int_{x_0}^{x_n} \left[ 1 - m \left( \frac{x}{x_0} - 1 \right) \right] dx} \quad (8)$$

对式(8)积分运算,可以得到

$$x_c = \frac{\frac{1}{2} (1+m) - \frac{1}{6} m \left( \frac{x_0}{\epsilon_{cu}} \right)^2 - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( \frac{x_0}{\epsilon_{cu}} \right)^2 - \frac{1}{3} m \left( \frac{x_0}{\epsilon_{cu}} \right)}{(1+m) - \frac{1}{n+1} \left( \frac{x_0}{\epsilon_{cu}} \right) - \frac{1}{2} m \left( \frac{x_0}{\epsilon_{cu}} + \frac{\epsilon_{cu}}{x_0} \right)} x_n \quad (9)$$

### 1.3 矩形应力图形简化

为了避免混凝土压力分析时复杂的积分运算，各国规范无一例外将抛物线型(或其他形状，取决于混凝土应力-应变曲线的形式)混凝土压力简化为简单的几何图形，简化后的图形应该满足图形面积相等、重心相同及计算简便的要求<sup>[1]</sup>。《规范》将混凝土

土的应力分布图形简化为矩形应力图形,简化图形的高度为  $x_n$ ,“应力强度”为  $f_c$ ,其中  $\eta$  为名义受压区高度系数,  $\xi$  为名义应力强度系数。简化后的应力图形见图 1(b) 虚线部分。

1) 简化方法。简化前后,应该保证混凝土压力合力及作用点位置保持不变,即应该满足

$$\begin{cases} f_c b x_n = C_c \\ x_n - 0.5 x_n = x_c \end{cases} \quad (10)$$

2) 简化结果。由式(10),可以得到

$$= 2(x_n - x_c) / x_n \quad (11)$$

将式(9)代入(11),可以得到

$$\begin{aligned} &= \left\{ (1+m) - \left[ \frac{2}{n+1} + m \right] \left[ \frac{\sigma}{\sigma_y} \right] - \frac{1}{3} m \left[ \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma} \right] + \right. \\ &\quad \left. \left[ \frac{1}{3} m + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \left[ \frac{\sigma}{\sigma_y} \right]^2 \right\} \cdot \\ &\quad \left[ (1+m) - \frac{1}{n+1} \left[ \frac{\sigma}{\sigma_y} \right] - \frac{1}{2} m \left[ \frac{\sigma}{\sigma_y} + \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma} \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

由式(10),还可以得到

$$= \frac{C_c}{f_c b x_n} \quad (13)$$

将式(7)和(12)代入(13),可以求得

$$= \frac{1}{f_c} \left[ (1+m) - \frac{1}{n+1} \left[ \frac{\sigma}{\sigma_y} \right] - \frac{1}{2} m \left[ \frac{\sigma}{\sigma_y} + \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma} \right] \right] \quad (14)$$

## 2 不同模型的计算结果

### 2.1 不同模型的参数

式(14)显示,名义受压区高度系数  $\eta$  和名义应力强度系数  $\xi$  均与有应变梯度下混凝土受压应力-应变曲线的参数有关。为了对比分析,表 1 给出了《规范》、Hognestad<sup>[5]</sup>以及王传志<sup>[6]</sup>等提出的模型参数。在这 3 种模型中,《规范》采用的模型考虑了混凝土的变形参数与混凝土强度的关系;王传志模型考虑了有应变梯度下混凝土受压的峰值应变和峰值应力较中心受压有不同程度的提高,对纯弯截面,偏心距  $e_0 =$  ;对于强度等级小于 C50 的普通混凝土,各模型均认为计算参数与混凝土强度无关。

表 1 不同模型给出的受弯截面混凝土应力-应变曲线参数

Table 1 Stress-strain curve equations and parameters

参数	参数来源	《规范》模型	Hognestad 模型	王传志模型
$n$	统计公式	$n = 2 - (f_{cu,k} - 50) / 60$	2	2
	简化值	2		
$m$		0	1/6	1/6
$\sigma_p$	统计公式	$\sigma_p = 0.002 + 0.5(f_{cu,k} - 50) \times 10^{-5}$	0.002	$\frac{\sigma_p}{f_c} = 1.2 - \frac{0.2}{1 + 6e_0/h}$
	简化值	0.002		
$\sigma_{cu}$	统计公式	$\sigma_{cu} = 0.0033 - (f_{cu,k} - 50) \times 10^{-5}$	0.0038	0.0033
	简化值	0.0033		
$\sigma_0$	统计公式		$\sigma_0 = f_c$	$\frac{\sigma_0}{f_c} = 1.2 - \frac{0.2}{1 + 6e_0/h}$
	简化值	$\sigma_0 = f_c$		

### 2.2 不同模型的计算结果

1) 普通混凝土的简化计算。对于强度等级不超过 C50 的普通混凝土,可取  $n = 2$ ,  $\sigma_p$ ,  $\sigma_{cu}$  取为常数,由式(12)和(14)可以得到不同模型计算公式下的简化公式(表 2)。将不同模型的计算参数代入式(12)和(14),可得到等效矩形应力图形的参数,分析结果

见表 3。

2) 高强混凝土的简化计算。对于强度等级大于 C50 的高强混凝土,《规范》采用了随混凝土强度等级变化的应力-应变曲线指数系数、峰值应变及极限应变,代入计算公式,可得到不同混凝土强度等级下矩形应力图形的参数(表 4)。

表2 等效应力图形计算结果

Table 2 Formula of equivalent concrete stress block parameters

简化应力图形参数	有下降段 ( $m = 1/6, n = 2$ )	无下降段 ( $m = 0, n = 2$ )
名义受压区高度系数	$= \frac{42 - 30(\sigma' / \sigma_{cu}) - 2(\sigma_{cu}' / \sigma) + 8(\sigma' / \sigma_{cu})^2}{42 - 12(\sigma' / \sigma_{cu}) - 3(\sigma' / \sigma_{cu} + \sigma_{cu}' / \sigma)}$	$= \frac{6 - 4(\sigma' / \sigma_{cu}) + (\sigma' / \sigma_{cu})^2}{6 - 2(\sigma' / \sigma_{cu})}$
应力强度系数	$= 1 / (12) [14 - 4(\sigma' / \sigma_{cu}) - (\sigma' / \sigma_{cu} + \sigma_{cu}' / \sigma)] (\sigma' / f_c)$	$= (1 / ) [1 - 1/3(\sigma' / \sigma_{cu}) (\sigma' / f_c)]$

表3 普通混凝土(C50及以下)等效应力图形简化参数计算结果

Table 3 Simplified concrete stress block parameters on common strength

模型	条件	$\sigma$	$\sigma_{cu}$		
《规范》模型	无下降段	0.002	0.003 3	0.823 55	0.968 9
	有下降段	0.002	0.003 3	0.838 96	0.925 7
王传志模型	有下降段	0.002 4	0.003 3	0.803 36	1.162 7
Hognestad 模型	有下降段	0.002 2	0.003 8	0.866 97	0.910 1
《规范》建议值				0.8	1.0

表4 高强混凝土(C55及以上)等效应力图形简化参数计算结果

Table 4 Simplified concrete stress block parameters on high strength

模型或建议值	条件	参数	混凝土强度等级					
			C55	C60	C65	C70	C75	C80
《规范》模型	无下降段		0.814 77	0.805 49	0.795 67	0.785 29	0.774 31	0.762 71
			0.965 1	0.960 8	0.955 8	0.949 9	0.943 1	0.935 3
	有下降段		0.828 72	0.818 04	0.806 89	0.795 24	0.783 06	0.770 31
			0.926 0	0.925 5	0.924 2	0.921 9	0.918 6	0.913 9
《规范》建议值			0.79	0.78	0.77	0.76	0.75	0.74
			0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94

### 2.3 对比分析

分析表3和表4可以发现:

1) 对于普通混凝土,不考虑下降段与考虑下降段的模型分析结果相差较大,其中《规范》模型与Hognestad模型的结果相差5%以上。由于受压时混凝土的软化性质已经得到共识,因此采用不考虑下降段的模型会带来不能忽略的误差。

2) 考虑应变梯度的影响会导致等效矩形应力图形的应力强度高于不考虑梯度影响时的10%以上,但应变梯度下的峰值应力值尚未得到一致公认的结论,因此不考虑梯度影响的偏于安全的简化可以被工程接受。

3) 《规范》建议值大于合理值近10%,偏于不安全,建议取  $\max = 0.9$ 。

4) 高强混凝土的等效矩形应力图形分析结果与

普通混凝土的简化结果规律一致。

## 3 对截面抗弯承载力的影响

### 3.1 单筋截面的抗弯强度

按照钢筋混凝土截面的抗弯强度理论,可以直接写出单筋截面的抗弯强度公式:

$$M_u = f_y A_s h_0 [1 - \rho_s f_y / (2 f_c)] \quad (15)$$

写成量刚一形式,截面的相对抗弯强度为

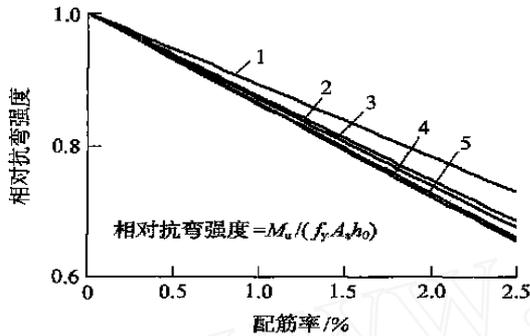
$$M_u / (f_y A_s h_0) = 1 - (\rho_s f_y / (2 f_c)) \quad (16)$$

式中:  $M_u$  为截面抗弯承载力,  $\rho_s = A_s / (bh_0)$  为截面配筋率,  $A_s$  为钢筋面积,  $f_y$  为钢筋强度,  $f_c$  为混凝土轴心抗压强度。

### 3.2 不同模型的分析结果

将采用不同模型计算得到的等效矩形应力图形

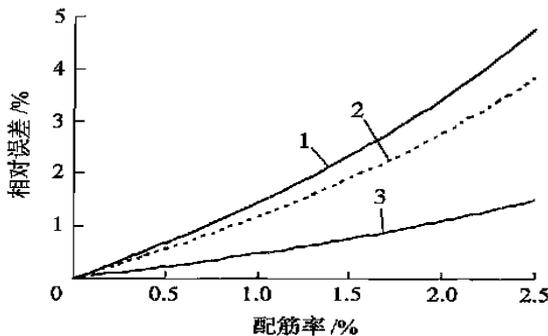
应力强度参数代入式(16),可以得到相应的截面相对抗弯强度。混凝土强度等级为 C25 的不同模型得到的相对抗弯强度与配筋率的关系曲线见图 2,《规范》建议值与不同模型相对抗弯强度的相对误差见图 3。



1. 王传志本构模型; 2. 《规范》建议值; 3. 无下降段《规范》建议值; 4. 有下降段《规范》建议值; 5. Hognestad 本构模型

图 2 不同模型下的截面相对抗弯强度

Fig. 2 Relative flexural strength with different simplified model



1. 与 Hognestad 本构模型误差; 2. 与有下降段《规范》模型误差; 3. 与无下降段《规范》模型误差

图 3 《规范》建议值与不同模型抗弯强度的相对误差

Fig. 3 Relative error of flexural strengths from code GBJ and other models

### 3.3 对比与讨论

1) 不考虑混凝土受压变形的软化效应将导致截面抗弯承载力的提高, 这种简化将导致截面承载力设计的可靠度下降, 且配筋率越大, 误差越大。

2) 《规范》简化值在不考虑混凝土软化效应的基础上, 进一步提高了等效矩形应力图形的应力强度,

使截面的抗弯强度提高了近 5%。

3) 王传志模型考虑梯度应变时的混凝土峰值应力较不考虑梯度应变时有一定的提高, 截面的承载力较不考虑梯度效应的模型大 10%。由于应变梯度的影响与实际受压区高度有关, 所以对于以受压为主的截面, 应变梯度较受弯截面小得多; 再有, 受到受弯截面应力简化分析与压弯截面分析方法的一致性要求的限制。所以在工程设计中不考虑应变梯度偏于安全, 更为合理。

## 4 结论

1) 混凝土的受压应力-应变曲线模型对截面承载力大小有明显影响, 不考虑混凝土受压的软化性能将过大估计截面抗弯强度;

2) 截面配筋率越大, 不同模型下截面抗弯强度的差别越明显;

3) 《规范》给出的等效矩形应力图形强度值导致截面承载力提高近 5%, 对于工程设计偏于不安全;

4) 应该对梯度应变下的变形特征及对截面承载力的影响进行更深入的讨论, 以完善正截面承载力的计算理论。

## 参 考 文 献

- [1] 过镇海, 时旭东. 钢筋混凝土原理与分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003. 226-229
- [2] Nilson A H, Darwin D, Dolan C W. Design of Concrete Structures(13th ed) [M]. New York: Mc Graw Hill, 2003. 77-79
- [3] GB50010—2002 混凝土结构设计规范[S]. 41-42
- [4] 滕智明, 朱金铨. 混凝土结构及砌体结构(上册)[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1992. 36-38
- [5] Hognestad E. Concrete stress distribution in ultimate strength[J]. Journal of ACI, 1955, 52(6): 455-479
- [6] 杜育科, 王传志. 混凝土偏心受压应力-应变全曲线的试验研究[A], 见: 清华大学抗震抗爆工程研究室. 科学报告集 第六集 混凝土力学性能的试验研究[C]. 北京: 清华大学出版社, 1996. 111-130