

基于现代最优控制理论的轴流涡轮级 S_2 流面 优化设计计算方法探讨

辛 1 邹滋祥²

(1. 中国农业大学 水利与土木工程学院,北京 100083; 2. 中国科学院 工程热物理研究所,北京 100080)

摘 要 把数学规划论和现代最优控制论引入了轴流涡轮级的优化设计。采用非线性数学规划条件极值问题的求解方法进行了轴流涡轮级子午面几何通道形状及叶片几何参数的最优化设计,再在优化了的子午面几何通道内建立包括涡轮级内所有性能参量的最优流型命题的物理模型及其数学表达式,并归化为一个在给定初始状态、自变量终端固定、部分状态变量终端受有约束的条件下使级的输出功率最大的最优控制问题,应用“代价函数法”及“共轭梯度法”计算得到符合给定约束条件并使目标函数取极值的最优环量分布,结果令人满意。

关键词 数学规划论; 最优控制论; 涡轮级; 优化设计

中图分类号 TK14

文章编号 1007-4333(2004)02-0063-05

文献标识码 A

S_2 flow surface optimal design of axial flow turbine stage based on the modern optimal control theory

Xin Zhe¹, Zou Zixiang²

(1. College of Water Conservancy and Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China;

2. Institute of Engineering Thermophysics, CAS, Beijing 100080, China)

Abstract The mathematical programming and optimal control theory were introduced into the optimal design of axial flow turbine stages. First, on the basis of conditional extreme value of non-linear mathematical programming, the meridian channel shape and vane geometric parameters of axial flow turbine stages were calculated. Then, with the optimized meridian channel of axial flow turbine, the perfect physical model and mathematical expression of the proposition of optimal flow pattern, including all performance in turbine stages, were put forward. This problem was further recasted into a typical control to maximize specific performance index such as that of work of stage with given initial state, fixed terminal condition and constraints of part of state terminal variables. By using cost-function method and DFP conjugate direction method, the optimal parameters were calculated.

Key words mathematical programming; optimal control theory; turbine stage; optimal design

由于涡轮级整体优化设计的极端复杂性和数学求解的高难度,为了易于实现整体或局部的优化,常把一个整体最优设计问题分解为若干个弱相关的优化设计子问题。如轴流涡轮级的优化设计,可以分解成涡轮子午面通道形状与叶片几何参数的最佳选择, S_1 流面和 S_2 流面的优化设计等子问题。涡轮级子午面通道形状以及叶片主要几何参数的合理选择是高负荷、高效率涡轮级设计中的第一个重要环

节。整个 S_2 流面的优化设计问题,由于涉及端壁边界层理论和叶端间隙的损失计算等,各参数之间关系非常复杂,很难归纳成影响级性能所有参数之间关系的统一表达式,更难归纳成常规最优控制问题中统一的变分形式,同时还由于反映问题现实性的多种不等式约束条件的存在,不但经典变分学无能为力,即使应用现代最优控制论的方法也难以解决;因此笔者基于现代最优控制理论的轴流涡轮级 S_2

收稿日期: 2003-10-29

作者简介: 辛 1, 博士研究生, 副教授, 主要从事优化设计理论及方法、CFD 技术在叶轮机械中的应用等研究。

流面的优化设计只限于最优流型问题,即只考虑各列叶片轴向间隙内气流参数的最优径向分布问题。

笔者完全依照数学规划论(函数极值问题+不等式约束)和最优控制论(泛函极值问题+不等式约束)的基本理论,针对轴流涡轮级整体优化设计的具体问题建立了完善的物理及数学模型,并采用严格的数学求解方法进行优化设计,在涡轮级整体优化设计的思想及方法上进行了有益的尝试,取得了令人满意的结果。

1 轴流涡轮级几何参数的最优化设计

1.1 物理模型及数学表达式

1) 优化设计变量。

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (H_T, c_{2a}, r_2, v_{1a}/v_{2a})^T$$

式中: H_T 为功率因数, $H_T = H_T / u_1^2$; 为运动反动度; c_{2a} 为流量系数, $c_{2a} = v_{2a} / u_1$; r_2 为半径比, $r_2 = r_2 / r_1$; v 和 u 分别为绝对速度和圆周速度, $m \cdot s^{-1}$; 下标 1 和 2 分别表示导叶出口站和动叶出口站, a 表示轴向。

2) 涡轮级效率。

$$\eta_T = 2 H_T (A + B + C + D)^{-1}$$

式中:

$$A = v_{2a}^2 [1/\eta^2 + (v_{1a}/v_{2a})^2 (1/\eta^2 - 1)]$$

$$B = (1/4) \times H_T^2 (1/\eta^2 + 1/\eta^2 - 1)$$

$$C = H_T [r_2 (1/\eta^2 - 1) + (1 - \eta) (1/\eta^2 - 1/\eta^2 - 1) + 2]$$

$$D = [r_2^2 - 2(1 - \eta) r_2] (1/\eta^2 - 1) + (1 - \eta)^2 (1/\eta^2 + 1/\eta^2 - 1)$$

这里, η_1 和 η_2 分别为导叶和动叶的速度损失因数。

3) 目标函数。

$$F(X) = 1 - \eta_T / \eta_{T0}$$

4) 约束条件。根据工程实际要求,各独立设计变量的取值域为:

$$1.25 \leq H_T \leq 1.30, 0.42 \leq c_{2a} \leq 0.45,$$

$$0.58 \leq r_2 \leq 0.63, 0.90 \leq v_{1a}/v_{2a} \leq 1.20,$$

$$0.78 \leq \eta_1 \leq 0.82$$

5) 损失模型。

$$\eta_{1a} = 0.017 + 0.003 / [0.09 \sin \alpha_1 / (\sin \alpha_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)) + 0.46] \cdot (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) + 0.085$$

$$\eta_{2a} = \frac{0.047 \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \cdot \frac{\cot \alpha_1 + \cot \alpha_2}{h/b} + 0.0118$$

$$(\text{或}) = \sqrt{1 - (\text{形面} + \text{二次流})}$$

式中: α 为相对气流角; η 为损失因数; h/b 为叶片展弦比(给定),导叶 $h/b = 1.5 \sim 2.0$; 动叶 $h/b = 2.0 \sim 3.0$ 。求导叶损失系数 η_{1a} 时用 α_0 和 α_1 代替 α_1 和 α_2 。

1.2 非线性数学规划问题的求解

1) 采用 SUMT 外点法,将有约束的极小化问题转化为求一序列无约束的极小化问题;

2) 采用 DFP 共轭方向法求解一多元函数无约束极小化问题;

3) 应用抛物线拟合法求解一元函数极小化问题,以确定共轭方向法中的最佳步长。

1.3 优化设计结果

给定设计工况参数如下:流量 $q_T = 45 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, 进口总压力 $P_0^* = 0.424 \text{ MPa}$, 进口总温度 $T_0^* = 1180 \text{ K}$, 转速 $n = 12000 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$, 输出功率 $P_T = 9779.4 \text{ kW}$ 。

优化设计变量及涡轮级效率计算结果见表 1。根据优化设计结果计算出涡轮级的几何参数、运动参数和气动参数(略),并绘出涡轮级子午面几何通道图(图 1)。

表 1 优化设计变量及涡轮级效率

Table 1 Optimal design variable and axial flow turbine stage efficiency

参数	H_T	c_{2a}	r_2	v_{1a}/v_{2a}	$\eta_T / \%$
计算结果	1.30	0.42	0.578	0.988	82.73

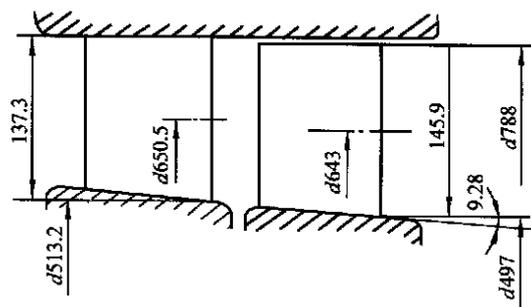


图 1 优化了的子午面几何通道参数

Fig. 1 Optimal meridional channel geometric parameters

2 轴流涡轮级叶片最佳流型设计

2.1 物理模型及数学表达式

本文中最佳流型设计是指包括导叶和动叶进出口截面全部热力和几何参数在内的整个涡轮级的流

型设计,是在已经优化的子午面几何通道内(图 1),并在叶列间的无叶间隙内进行。为了简化计算,假定流动是轴对称的,这样,在 S_2 流面内的径向叶片力 F_r 及所有周向微分量就可以忽略不计。同时还假定:流动相对稳定、绝热、可压,当地无黏,过程不等熵。

在上述假定下,流动应满足连续方程、动量方程、能量方程、过程方程、理想气体的状态方程、熵的关系式及速度三角形关系式,并由此可推出径向平衡方程,作为等式约束考虑在最佳流型设计的物理模型中。

根据最优控制理论,建立了最优控制环量和流线圈率半径最优流型设计的物理模型:

1) 状态向量。

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_9)^T = (v_{1m}, q_1, v_{1u} r_1, \alpha_1, v_{2m}, q_2, v_{2u} r_2, \alpha_2, r_2)^T \quad (1)$$

式中: v_m 为绝对速度在子午面上的投影, $m \cdot s^{-1}$; q 为质量流量, $kg \cdot s^{-1}$; v_u 为绝对速度的周向分量, $m \cdot s^{-1}$; $v_u r$ 为速度距, $m^2 \cdot s^{-1}$; α 为 v_m 与绝对速度的轴向分量间的夹角, rad; r 为半径, m; 下标 1 表示导叶出口截面, 2 表示动叶出口截面, m 表示子午面方向。

2) 控制向量。

$$U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T = \left(\frac{d(v_{1u} r_1)}{d r_1}, r_{1m}, \frac{d(v_{2u} r_2)}{d r_1}, r_{2m} \right)^T \quad (2)$$

3) 系统的微分方程组。

$$\left. \begin{aligned} dx_1/d r_1 &= f_1(r_1, x_1, x_3, x_4, u_1, u_2) \\ dx_2/d r_1 &= f_2(r_1, x_1, x_3, x_4) \\ dx_3/d r_1 &= f_3(u_1) \\ dx_4/d r_1 &= f_4(r_1, x_1, x_3, x_4, u_2) \\ dx_5/d r_1 &= f_5(r_1, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, u_1, u_3, u_4) \\ dx_6/d r_1 &= f_6(r_1, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9) \\ dx_7/d r_1 &= f_7(u_3) \\ dx_8/d r_1 &= f_8(r_1, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, u_4) \\ dx_9/d r_1 &= f_9(r_1, x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

4) 初始条件。

$$\left. \begin{aligned} q_1(r_{1r}) &= q_2(r_{1r}) = 0 \\ \alpha_1(r_{1r}) &= \alpha_2(r_{2r}) = \text{给定值} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中下标 r 表示根部。其他状态量初值可根据前面轴流涡轮级几何通道优化计算结果给出。

5) 约束条件。终端状态部分固定:

$$\left. \begin{aligned} q_1(r_{1t}) &= q_2(r_{2t}) = \bar{q} = \text{给定值} \\ r_2(r_{1t}) &= \bar{r}_2 = \text{给定值} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中下标 t 表示顶部。其他状态量自由,控制量无约束。

6) 指标泛函。本文选择在要求的级效率下级输出功率最大。

$$J = \int_{r_{1r}}^{r_{1t}} (v_{1u} r_1 - v_{2u} r_2) v_{1m} \cos \alpha_1 \alpha_2 r_1 d r_1 \quad (6)$$

于是,轴流涡轮级叶片最佳流型设计的最优控制命题可表述为:寻找 $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ 的最优分布,在满足约束条件(式(5))的情况下,使系统(式(3))由初态(式(4))转移至终端状态(式(5))时,指标(式(6))达到最大值。

2.2 最优控制问题的求解

如前所述,现已将轴流涡轮级叶片最佳流型的设计问题归纳为一个在给定初始状态、自变量终端固定、部分状态变量终端受有约束的条件下,使级的输出功率达到最大的最优控制问题。该最优流型问题的求解过程如下:

1) 用“代价函数法”做新的目标函数。

$$J = \int_{r_{1r}}^{r_{1t}} (v_{1u} r_1 - v_{2u} r_2) v_{1m} \cos \alpha_1 \alpha_2 r_1 d r_1 + A$$

式中:代价项

$$A = \frac{1}{2} N^{(j)} [(x_2(r_{1t}) - \bar{q}_1)^2 + (x_6(r_{1t}) - \bar{q}_2)^2 + (x_9(r_{1t}) - \bar{r}_2)^2] \\ (N^{(j+1)} = N \times N^{(j)} \quad N > 0)$$

$N^{(j)}$ 称为代价因子,上标(j)表示迭代次数。代价因子的确定是代价函数法的关键问题,本文中取 $N^{(0)} = 50, N = 2.5$ 。经此处理后,终端状态变量全部自由,原有约束最优控制问题转化为无约束最优控制问题。

2) 引入拉格朗日乘子。

$$(r_1) = (\alpha_1(r_1), \alpha_2(r_1), \dots, \alpha_9(r_1))^T$$

并定义哈密尔顿函数

$$H(r_1, X(r_1), U(r_1), \lambda(r_1)) = f_0(r_1, X(r_1), U(r_1)) + \lambda^T(r_1) f(r_1, X(r_1), U(r_1))$$

根据变分原理和极大值原理,可得 $U^*(r_1)$ 为最优控制的必要条件

$$\frac{\partial H(r_1, X^*(r_1), U^*(r_1), (r_1))}{\partial U} = 0$$

$$(r_{1r} < r_1 < r_{1t})$$

即最优控制 $U^*(r_1)$ 应使哈密顿函数 H 取极小值。此时 (r_1) 所满足的常微分方程称为伴随方程

$$\frac{d}{dr_1} = - \frac{\partial H(r_1, X^*(r_1), U^*(r_1), (r_1))}{\partial X}$$

其中 $X^*(r_1)$ 为对应于 $U^*(r_1)$ 的最佳轨迹。

边界条件:初态 $X(r_{1r}) = X^{(0)}$ 。终态 $i(r_{1t})$ 由 $i(r_{1t}) = 0 (i = 1, 3, 4, 5, 7, 8)$ 和 $i(r_{1t}) = N^{(j)} i = N^{(j)} [x_i(r_{1t}) - x_i^j] (i = 2, 6, 9)$ 确定。

3) 采用共轭梯度方法求解无约束最优控制问题。

如前所述,应用变分法,特别是极大值原理,将最优控制问题化成了求解常微分方程的两点边值问题,从而可借助数值计算方法加以解决。首先给出 $U^{(0)}(r_1)$, 求出对应的 H^0 , 然后逐次修改 $U(r_1)$, 使对应的 H 值逐次减小,直至趋于最小值,而对 $U(r_1)$ 的每次修改均沿函数 H 值的共轭下降方向进行。

假设已获得第 k 次计算近似值 $U^{(k)}(r_1)$, 按式(7)求出第 k 次迭代时指标的梯度

$$g^{(k)} = \left. \frac{\partial H}{\partial U} \right|_{U=U^{(k)}(r_1)} = \left(\frac{\partial H}{\partial u_1}, \frac{\partial H}{\partial u_2}, \frac{\partial H}{\partial u_3}, \frac{\partial H}{\partial u_4} \right)^T \Big|_{U=U^{(k)}(r_1)} \quad (7)$$

并按共轭梯度方法求出寻优方向

$$P^{(k)} = -g^{(k)} + \alpha^{(k)} \cdot P^{(k-1)}$$

其中共轭系数

$$\alpha^{(k)} = \begin{cases} \frac{(g^{(k)} \cdot g^{(k)})}{(g^{(k-1)}, g^{(k-1)})} & k > 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

则第 $(k+1)$ 次控制变量取值为

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)}$$

其中 $\alpha^{(k)}$ 为最优步长。

4) 初始控制变量 $U^{(0)}(t)$ 的选取。用共轭梯度法进行计算时,要求对初始控制变量 $U^{(0)}(t)$ 进行适当选取,如果选取得当,可以加速迭代过程的收敛性。可根据具体问题的物理意义及实际的计算经验较好地选取 $U^{(0)}(t)$ 。

5) 最优步长 $\alpha^{(k)}$ 的选择。采用曲线拟合法解

一维极小化问题

$$J(U^{(k)}(t) + \alpha^{(k)} P^{(k)}) = \min_{\alpha > 0} J(U^{(k)}(t) + \alpha^{(k)} P^{(k)})$$

可以最佳地确定 $\alpha^{(k)}$ 的值。

6) 计算过程的终止。设 ϵ 是给定的允许误差范围,当指标泛函 J 满足

$$\left| \frac{J(U^{(k+1)}(t)) - J(U^{(k)}(t))}{J(U^{(k+1)}(t))} \right| = \epsilon$$

时,计算过程终止。

2.3 计算结果与分析

1) 算例。

a. 给定设计参数:流量 $q = 45 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$; 涡轮转速 $n = 12000 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$; 涡轮进口总压力 $p_0^* = 424.34 \text{ kPa}$; 涡轮进口总温度 $T_0^* = 1180 \text{ K}$; 涡轮级出口压力 $p_2^* = 179.4 \text{ kPa}$ 。

b. 状态变量初值 $X^{(0)}$:

$$x_1(r_{1r}) = v_{1m}(r_{1r}) = 186.78$$

$$x_2(r_{1r}) = q_1(r_{1r}) = 0$$

$$x_3(r_{1r}) = v_{1u} r_1(r_{1r}) = 129.44$$

$$x_4(r_{1r}) = \alpha_1(r_{1r}) = -9.50$$

$$x_5(r_{1r}) = v_{2m}(r_{1r}) = 236.40$$

$$x_6(r_{1r}) = q_2(r_{1r}) = 0$$

$$x_7(r_{1r}) = v_{2u} r_2(r_{1r}) = -7.11$$

$$x_8(r_{1r}) = \alpha_2(r_{1r}) = -9.50$$

$$x_9(r_{1r}) = r_2(r_{1r}) = 0.25$$

2) 计算结果。按 2.2 所述的数值计算方法进行最佳流型设计,得到满足约束(式(5))、使系统(式(3))由初态(式(4))转移到终态(式(5)),并使指标(式(6))达最大值的最优环量分布和流线曲率半径沿径向的分布(部分结果见图 2 和 3)及相应的最佳轨迹 $X^*(r_1)$ (图略)。

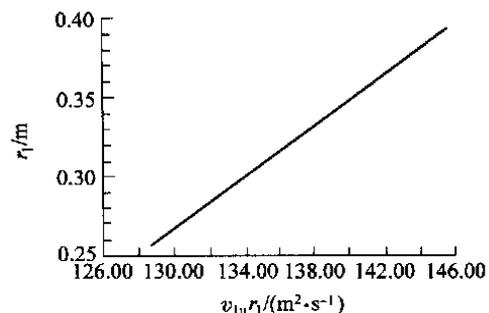
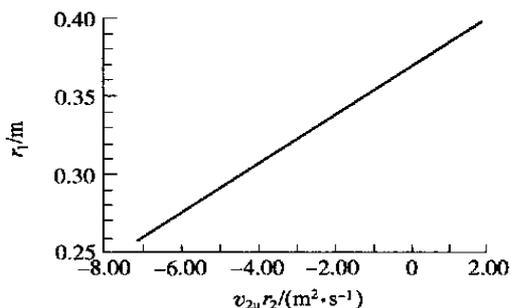


图 2 $v_{1u} r_1$ 沿径向的分布

Fig. 2 $v_{1u} r_1$ distributing along radial direction

根据得到的最优流型设计参数,通过计算还可

图 3 $v_{2u} r_2$ 沿径向的分布Fig. 3 $v_{2u} r_2$ distributing along radial direction

以得到:

- 速度三角形全部参数沿叶高的分布;
 - 导叶及动叶相对马赫数沿叶高的分布;
 - 热力反动度沿叶高的分布;
 - 效率沿叶高的分布及级效率。
- 3) 讨论与分析。

a. 从计算结果来看,随着寻优路径的不断改变,目标函数一步步接近最优状态,速度距 $v_u r$ 也随着不断变化,由图 2 和 3 可以看出 $v_u r$ 沿叶高的分布是较均匀而合理的,而流线曲率半径 r_m 的变化很小。如为简化模型,降低计算难度,可考虑取消 r_m 的控制。

b. 图 4 示出代价函数中代价项与迭代次数的关系。可以看出,只需迭代 3 次,代价项就趋于 0,即得到满足约束条件的最优解。由此可以看出,本文中采用的计算方法和程序有较好的精确度和良好

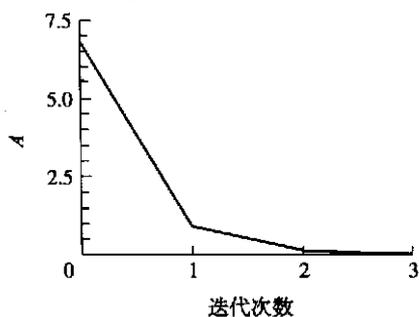


图 4 代价项 A 与迭代次数的关系

Fig. 4 Relation between cost-function and iterative time

的收敛性。

c. 出于简化计算的考虑,本文中尝试分别以导叶或动叶出口截面参数及环量已知为前提进行最佳流型设计,得到的最优控制和最佳轨迹与在整级全部性能参量所形成的向量空间进行的整级最佳流型设计完全不同,达到的最大输出功率和级效率也较整级最佳流型设计(最大输出功率 906.6 kW,对应的级效率 81.5%)低得多,这个结果与从状态空间的角度进行直观分析结果是一致的。整级最优控制的状态空间由全部状态向量组成,其最佳轨迹与最优控制是在整个向量空间内搜索寻优得到的,而分别进行最优控制的状态空间只是整体状态空间的一部分,它的最佳轨迹及最优控制的获得都要受到状态空间的限制,因而 2 个子空间内最优控制的迭加并不等于整个空间的最优控制。本文中采用了整级最优控制的方法。

3 结束语

根据数学规划论和现代最优控制理论,从建立物理模型、数学模型到编程上机计算求解,较完整地解决了轴流涡轮级几何参数的最优化设计和 S_2 流面的最优流型设计问题,对涡轮级的整体优化设计方法做了有益的尝试。通过计算肯定了本文中所强调整级最优控制的思想,计算结果表明本文中采用的方法和程序具有较高的精度和良好的收敛性,这些思想和方法可方便地推广到其他最优化命题中去。

参 考 文 献

- [1] 刘惟信. 机械最优化设计(第二版)[M]. 北京:清华大学出版社,1994. 1~252
- [2] 胡寿松. 自动控制理论(第三版)[M]. 北京:国防工业出版社,1994. 442~625
- [3] 辛 等,邹滋祥. 叶轮机级几何参数的最优化设计[J]. 中国农业大学学报,1998,3(6):75~79
- [4] 辛 等,邹滋祥. 轴流透平级的最佳流型设计方法[J]. 航空动力学报,2001,16(1):67~70