

基于 MATLAB 的交错轴斜齿轮齿面接触的计算机模拟

赵亚平 魏文军 王书茂
(中国农业大学 工学院,北京 100083)

摘要 建立了交错轴斜齿轮齿面接触分析的数学模型,利用 MATLAB 软件绘制了交错轴斜齿轮副两齿面接触的空间图形,并对其进行了局部放大以展示瞬时接触椭圆;绘制了两齿面接触点处相对速度的速端曲线图。本研究为进行齿轮副虚拟设计、虚拟装配、三维动画、运动仿真等提供了可借鉴的资料。

关键词 交错轴斜齿轮;齿面接触分析;MATLAB

中图分类号 TH 132.422; TP 312

文章编号 1007-4333(2004)01-0081-03

文献标识码 A

Computer simulation for crossed helical involute gears contact analysis by using MATLAB

Zhao Yaping, Wei Wenjun, Wang Shumao

(College of Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract The engagement mathematic model of crossed helical involute gears was built. The spacial figure of gears contact was drawn up by using MATLAB software. The instantaneous contact ellipse is revealed by partial enlargement. The extremity curve of the velocity vector at the contact point was also drawn up. The basic platform of dummy assembling, three-dimensional animating and resembling the real motion were constructed. A new seeable method of gears contact analyzing was explored by using computer.

Key words crossed helical involute gears; gears contact analysis; MATLAB

以往的齿面接触分析^[1],大都只是利用某种高级语言的绘图功能,画出轮齿整个啮合过程中接触区的投影图^[2]。由于整个画面是二维的,故对于齿间点接触的情况难以表达瞬时接触椭圆的形状。MATLAB 软件计算功能较强,可在已知曲线、曲面方程的情况下,方便的绘制出其三维图形^[3]。利用此种软件进行齿面接触分析具备一些独特的优点,但在文献中尚不多见。

交错轴斜齿轮^[4]是交错轴间齿轮传动的重要形式。这种齿轮齿间是点接触,本文中拟利用 MATLAB 软件,借助计算机较强的三维视图表达功能,说明其轮齿的啮合情况,进而探索出一种齿面接触分析仿真模拟的新方法。

1 交错轴斜齿轮齿面接触分析计算机模拟的数学模型

1.1 齿面方程与齿面单位法向量

交错轴斜齿轮副中,就其单个齿轮来说都是斜齿轮,齿面是渐开螺旋面,特殊情况下退化为渐开线

柱面。就啮合的具体形式看来,交错轴斜齿轮副可分为两同旋向斜齿轮相配、两不同旋向斜齿轮相配、一直齿轮与一斜齿轮相配等情形。本文中约定齿轮 1 为右旋斜齿轮,齿轮 2 为左旋斜齿轮,齿面分别为右旋和左旋渐开螺旋面。对其他情形的模拟与本文方法类似。在与齿面固连的坐标系 $i(O_i; i_i, j_i, k_i)$, $i=1,2$ 中,利用圆向量函数和球向量函数^[5],分别写出齿面 1 和齿面 2 的方程式(1)和(2):

$$r_{1,1} = r_{b1} e_1(\varphi_1) + p_{1,1} k_1 + u_1 n_1(\varphi_1 - 90^\circ, 90^\circ - \beta_1) \quad (1)$$

$$r_{2,2} = r_{b2} e_2(\varphi_2) + p_{2,2} k_2 - u_2 n_2(\varphi_2 - 90^\circ, -90^\circ + \beta_2) \quad (2)$$

其中: u_i 和 β_i 为齿面参数,且 β_i 为角度, $u_i > 0$, $\beta_i > 0$; r_{bi} 为齿轮基圆半径; p_i 为齿轮 i 齿面的螺旋参数; β_i 为齿轮 i 基圆柱螺旋角, β_i 与分度圆柱螺旋角 β_i 的关系见文献[6]; e_i 和 n_i 为与齿面固连的坐标系 $i(O_i; i_i, j_i, k_i)$ 中的单位圆向量和单位球向量, $r_{1,1}$ 和 $r_{2,2}$ 是齿面 i 上任意一点在坐标系 i 中

收稿日期: 2002-11-25

作者简介: 赵亚平,博士研究生;王书茂,教授,博士生导师,主要从事车辆机电一体化技术研究。

的向径, $i = 1, 2$ 。

根据式(1)、(2)和文献[7]得到齿面 i 上任意一点的单位法向量:

$$n_{1,1} = -\cos \beta_1 g_1(\gamma_1) + \sin \beta_1 k_1 \quad (3)$$

$$n_{2,2} = -\cos \beta_2 g_2(\gamma_2) - \sin \beta_2 k_2 \quad (4)$$

其中: g_i 为与齿面固连的坐标系 $i(O_i; i_i, j_i, k_i)$ 中的单位圆向量。

1.2 确定两齿面瞬时接触点的方程

坐标系 $i(O_i; i_i, j_i, k_i)$ 分别与齿面 i 固连, k_i 分别与两轮轴线重合 ($i = 1, 2$), 坐标系 $(O_1; i, j, k)$ 和 $(O_2; i, j, k)$ 为静系, 各坐标系间的位置关系见图 1, 其中 $O_2O_1 = aj$, a 为中心距。利用圆向量函数、球向量函数得到齿面方程及其对应的单位法向量在静坐标系 $(O_1; i, j, k)$ 中的表达式

$$r_1 = r_{b1} e^{i(\gamma_1 + \beta_1)} - u_1 \sin \beta_1 g(\gamma_1 + \beta_1) + (p_1 - u_1 \cos \beta_1) k \quad (5)$$

$$n_1 = -\cos \beta_1 g(\gamma_1 + \beta_1) + \sin \beta_1 k \quad (6)$$

$$r_2 = [r_{b2} \cos(\gamma_2 - \beta_2) + u_2 \sin \beta_2 \sin(\gamma_2 - \beta_2)] n(0, -) - [r_{b2} \sin(\gamma_2 - \beta_2) - u_2 \sin \beta_2 \cos(\gamma_2 - \beta_2)] j + (p_2 - u_2 \cos \beta_2) m(0, -) \quad (7)$$

$$n_2 = -\cos \beta_2 \sin(\gamma_2 - \beta_2) n(0, -) - \cos \beta_2 \cos(\gamma_2 - \beta_2) j - \sin \beta_2 m(0, -) \quad (8)$$

其中: β_i 为轴交角, $0 < \beta_i < 90^\circ$, 由于齿轮副中两齿轮旋向相反, 所以 $\omega_1 = -\omega_2$; γ_i 为齿轮 i 相对其轴线的转角, $i = 1, 2$ 。根据齿面接触条件, 由式(5)~(8)得到齿面接触方程组:

$$\left. \begin{aligned} r_2 - r_1 - O_2O_1 &= 0 \\ n_1 - n_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

解此非线性方程组可以得到两齿面的瞬时接触点。

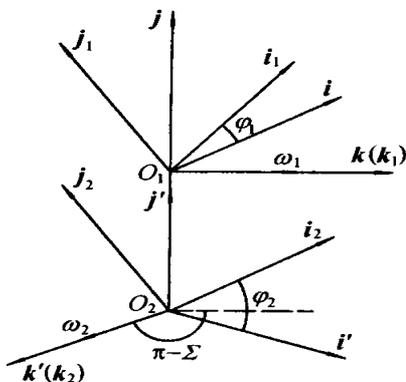


图 1 各坐标系间的相互位置关系
Fig. 1 Ubidity of coordinate systems

1.3 两齿面接触点处的相对速度

设齿轮 1 的角速度 $|\omega_1| = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 则两齿轮的角速度矢量分别为 $\omega_1 = k$ 和 $\omega_2 = i_{21} k$, 其中 i_{21} 为传动比。利用式(5), 根据文献[5], 可以算得静系

$(O_1; i, j, k)$ 中两齿面接触点处的相对速度为

$$v_{12} = (\omega_1 - \omega_2) \times r_1 - \omega_2 \times O_2O_1 = \begin{pmatrix} (x) \\ (y) \\ (z) \end{pmatrix} i + \begin{pmatrix} (y) \\ (x) \\ (z) \end{pmatrix} j + \begin{pmatrix} (z) \\ (x) \\ (y) \end{pmatrix} k \quad (10)$$

其中相对速度的各分量为

$$\begin{pmatrix} (x) \\ (y) \\ (z) \end{pmatrix} = (1 + i_{21} \cos \beta_1) r_{b1} \cos \tau_{11} - i_{21} a \cos \beta_1 + u_1 (1 + i_{21} \cos \beta_1) \sin \beta_1 \sin \tau_{11}$$

$$\begin{pmatrix} (y) \\ (x) \\ (z) \end{pmatrix} = \left[1 + \frac{i_{21} \cos \beta_2}{\cos \beta_1} \right] (r_{b1} \sin \tau_{11} - u_1 \sin \beta_1 \cos \tau_{11})$$

$$\begin{pmatrix} (z) \\ (x) \\ (y) \end{pmatrix} = i_{21} \sin \beta_2 (a - r_{b1} \cos \tau_{11} - u_1 \sin \beta_1 \sin \tau_{11})$$

式中: τ_{1i} 为齿轮 i 的端面压力角。

1.4 速度端曲线方程

静系 $(O_1; i, j, k)$ 中, 两齿面接触点处相对速度矢量端点的轨迹, 可以称作速度端曲线, 简称速端曲线。利用式(10)可以写出其方程式

$$r = (A_1 + B_1 u_1) i + (A_2 + B_2 u_1) j + (A_3 + B_3 u_1) k \quad (11)$$

其中: u_1 为参变量; A_j 和 B_j 为常量, $j = 1, 2, 3$,

$$A_1 = r_{b1} \sin \tau_{11} + (1 + i_{21} \cos \beta_1) r_{b1} \cos \tau_{11} - i_{21} a \cos \beta_1$$

$$B_1 = (1 + i_{21} \cos \beta_1) \sin \beta_1 \sin \tau_{11} - \sin \beta_1 \cos \tau_{11}$$

$$A_2 = r_{b1} \left[1 + i_{21} \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} \right] \sin \tau_{11} - r_{b1} \cos \tau_{11}$$

$$B_2 = -\sin \beta_1 \sin \tau_{11} - \left[1 + i_{21} \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} \right] \sin \beta_1 \cos \tau_{11}$$

$$A_3 = i_{21} a \sin \beta_2 - i_{21} r_{b1} \sin \beta_2 \cos \tau_{11} - r_{b1} \tan \beta_1 \sin \tau_{11}$$

$$B_3 = \tan \beta_1 \sin \beta_1 \cos \tau_{11} - i_{21} \sin \beta_2 \sin \beta_1 \sin \tau_{11}$$

式(11)是一个直线方程, 说明两齿面接触点处的相对速度端曲线为一直线。

2 基于 MATLAB 的齿面接触模拟实例

根据本文中建立的数学模型, 利用 MATLAB 语言编制程序^[8], 可以对齿面接触的情况进行模拟, 具体步骤如下:

1) 求解非线性方程组式(9)得到两齿面的接触点。式(9)是由 5 个方程组成的非线性方程组, 含有 6 个未知量 $u_1, \tau_{11}, \tau_{12}, u_2, \tau_{21}, \tau_{22}$, 给定 u_1 控制接触点在齿面上的位置, 可以解得其他 5 个未知量, 从而确定两齿面的一个接触点。为此首先调用

MATLAB 函数 $f\text{solve}()$ 求解非线性方程组 (9), 其中 u_1 的上下限分别为

$$u_{\max} = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}}{\sin \beta_1}$$

$$u_{\min} = \frac{a - r_{b1} \cos \alpha_1 - r_{b2} \cos \alpha_2 - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \sin \alpha_2}{\sin \beta_1 \sin \alpha_1}$$

式中 r_{ai} 为齿轮顶圆半径。

2) 利用 MATLAB 函数 $\text{mesh}()$ 绘制两齿面 σ_1 和 σ_2 在所得接触点接触时的空间图形。对该图形进行局部放大, 展示两齿面的瞬时接触椭圆。

3) 根据式 (10) 计算接触点处的相对速度, 然后调用 MATLAB 函数 $\text{plot3}()$ 绘制速端曲线图。

如: 已知 $\beta = 30^\circ$, $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 15^\circ$, $n = 20^\circ$, $m_n = 5 \text{ mm}$, $Z_1 = 17$, $i_{12} = 2$, 齿宽 $b = 40 \text{ mm}$ 。绘制出的两齿面瞬时接触的空间图形见图 2。

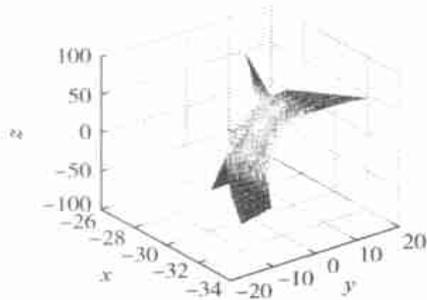


图 2 两齿轮的瞬时接触点

Fig. 2 Instantaneous contact point of two gears

为了清楚地展示接触点附近两齿面接触的情况, 对图 2 进行局部放大, 得到图 3, 可以清楚地看出接触点附近因为两齿面十分靠近, 使得齿面网格重叠, 从而形成了椭圆形斑点。此椭圆形斑点模拟

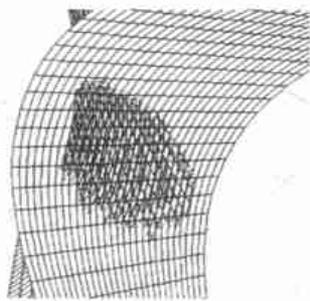


图 3 两齿轮瞬时接触点的局部放大图

Fig. 3 Local amplification figure of instantaneous contact point of two gears

了该接触点处的瞬时接触椭圆。图 4 为两齿面接触点处的相对速度矢量及其速端曲线。

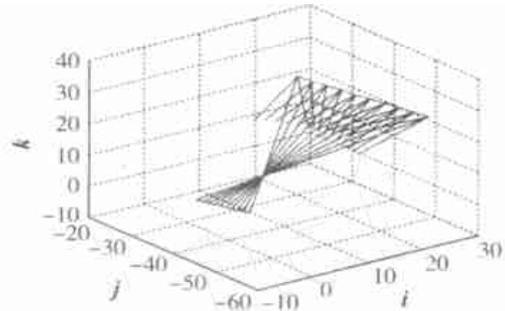


图 4 交错轴斜齿轮接触点相对速度及其速端曲线

Fig. 4 Relative velocity vector and its endline at contact point of two gears

3 结束语

运用 MATLAB 软件进行点接触齿面的计算机辅助分析, 可以在三维空间中描绘齿面的接触情况, 直接模拟两齿面的瞬时接触椭圆, 在反映齿面接触特性方面较为直观。今后可以添加齿轮副虚拟装配、三维动画等功能, 并推广应用于其他齿轮副、蜗轮蜗杆副以及各种啮合传动副, 形成一种计算机辅助齿面接触分析新的方法。

参 考 文 献

- [1] 董学朱, 金志民, 叶海建. 弧齿锥齿轮和准双曲面齿轮齿面接触区的计算机辅助分析[J]. 北京农业工程大学学报, 1989, 9(3): 48 ~ 57
- [2] 董学朱. 摆线齿锥齿轮及准双曲面齿轮设计和制造[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003. 322 ~ 342
- [3] 王炳武, 胥. MATLAB 6.1 实用教程[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000. 1 ~ 300
- [4] 董学朱. 交错轴渐开线齿轮的研究[J]. 机械传动, 1993 (3): 1 ~ 2
- [5] 董学朱. 齿轮啮合理论基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 1989. 1 ~ 3
- [6] 孙桓, 傅则绍. 机械原理[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995. 239 ~ 252
- [7] 梅向明, 黄敬之. 微分几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988. 96 ~ 97
- [8] 赵亚平. 螺旋齿轮啮合理论研究与试验分析[D]. 北京: 中国农业大学, 2002