

债券价格、到期期限以及到期收益率的数学分析方法

常清英¹ 林清泉²

(1. 中国农业大学 理学院,北京 100083; 2. 中国人民大学 财政金融学院,北京)

摘要 对债券市场价格与票息率、到期收益率以及到期期限等参数之间关系的研究通常采用实证方法,这种用个别推出一般的方法不甚严密。本文中采用数学分析的方法,利用计算机进行数据处理,对以上各参数之间的关系进行了严格的论证。通过对量化结果的讨论,提出了分析各参数对债券价格影响的有效方法,得出了一些有意义的结果。

关键词 债券价格; 票息率; 到期收益率

中图分类号 F 224. 11; O 211. 6

文章编号 1007-4333(2003)04-0081-05

文献标识码 A

Analysis on security price, time, income rate

Chang Qingying¹ Lin Qingquan²

(1. College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, China;

2. School of Finance, Renmin University of China)

Abstract Usually we studied the relationship of these parameters, such as security price, coupon rate, income and term by experimentation. Strictly speaking it dose not work by several special examples to account for the general conclusion. By the analysis of quantity and mathematics the relationship of these parameters was developed in detail and some valuable results about the relationship of these parameters were obtained.

Key words security price; coupon rate; income rate

债券价格问题是债券发行者在发行债券之前必须要解决的首要问题。如果发行价格过高,可能出现滞销现象;反之,则会给债券发行者带来损失。确定债券价格的方法是:计算债券票息率对到期收益率折现而得到的现值,该面值折现的总和即为债券价格^[1,2]。债券价格与债券到期期限、票息率以及到期收益率之间有着密切的联系,研究它们之间的相互关系对分析债券市场具有十分重要的意义。

传统的方法是通过几个实例的分析而得到相应的规律^[3,4]。这种方法虽然比较方便,但是从严格意义上讲,这种用个别(尽管有几组数据)推出一般的方法是很不严密的。对于如何在给定债券价格和债券票息条件下,确定债券到期收益率这个问题上,通常采用试错法,该方法的缺陷非常明显:1)当债券到期收益率不是两位小数的特殊值(如0.26,0.11,等等)时,就很难试出正确的值来;2)由

于到期收益率是取值于(0,1)区间内的任一数,故在有限次的试错中经常得不到结果。本文中运用数学分析方法和连续函数的性质,以计算机为计算工具,分析债券票息、债券到期收益率以及债券到期期限等参数对债券价格的影响,根据比例法(弦位法)和牛顿法(切线法),采用逼近的方法,在一定的误差条件下求出债券到期收益率。

1 债券价格、债券到期收益率与债券到期期限之间的关系

1.1 债券价格的确定

设某一种债券的面值为 m , 票息率为 r , 到期期限为 n , 则每一个时期的票息 $C = rm$; 又设到期收益率为 y , 则债券价格^[2,3]

$$q = \sum_{i=1}^n \frac{C}{(1+y)^i} + \frac{m}{(1+y)^n} \quad (1)$$

收稿日期:2002-03-28

作者简介:常清英,副教授,主要研究方向为数学、物理方法在经济学中的应用

利用计算机随机产生 C 、 n 、 y 和 m 的不同值,编程计算出债券价格 q ,结果见表 1。

表 1 不同票息、到期期限、到期收益率和面值下的债券价格

Table 1 The bond price at different coupon, term, income rate & face value

序号	票息 $C/\text{元}$	到期期限 n/a	面值 $m/\text{元}$	到期收益率 y	债券价格 $q/\text{元}$
1	21	3	9 400	0.034	8 560.19
2	18	38	2 400	0.046	750.03
3	13	2	4 500	0.082	3 868.90
4	18	47	5 900	0.018	3 121.17
5	13	2	9 200	0.057	8 254.78
6	11	8	300	0.003	379.84
7	24	13	1 800	0.061	1 039.78
8	11	25	8 400	0.068	1 736.54
9	8	37	5 600	0.040	1 441.38
10	18	5	400	0.052	388.14

1.2 票息、面值和到期期限一定时,到期收益率对债券价格的影响

利用计算机编程计算,结果见表 2。由表 2 可知当到期收益率 y 升高时,债券价格 q 下降; y 降低时, q 上升。

表 2 票息、面值及到期期限一定时到期收益率对债券价格的影响

Table 2 The effect on the bond price of income rate, when coupon, face value and term have been given

序号	票息 $C/\text{元}$	到期期限 n/a	面值 $m/\text{元}$	到期收益率 y	债券价格 $q/\text{元}$
1	25	50	1 000	0.024	1 043.04
2	25	50	1 000	0.026	966.93
3	25	50	1 000	0.029	892.90
4	25	50	1 000	0.031	858.95
5	25	50	1 000	0.032	825.52
6	25	50	1 000	0.036	748.06
7	25	50	1 000	0.036	746.76
8	25	50	1 000	0.040	681.08
9	25	50	1 000	0.044	620.20
10	25	50	1 000	0.047	573.95

1.3 票息、面值、到期收益率和票息率一定时,到期期限对债券价格的影响

计算结果见表 3。可见:1)当 $y > r$ 时,随着债券到期期限 n 的增加,债券价格 q 下降。2)当 $y < r$ 时,随着 n 的减少, q 下降。

表 3 票息、面值、到期收益率一定时到期期限对价格的影响

Table 3 The effect on the bond price of term, when coupon, face value and income rate have been given

条件	序号	票息 $C/\text{元}$	到期期限 n/a	面值 $m/\text{元}$	到期收益率 y	债券价格 $q/\text{元}$
$y > r$	1	25	23	1 000	0.050	662.79
	2	25	25	1 000	0.050	647.65
	3	25	27	1 000	0.050	633.92
	4	25	28	1 000	0.050	627.55
	5	25	29	1 000	0.050	621.47
	6	25	32	1 000	0.050	604.93
	7	25	32	1 000	0.050	604.93
	8	25	35	1 000	0.050	590.65
	9	25	39	1 000	0.050	574.57
	10	25	42	1 000	0.050	564.42
$y < r$	1	40	67	1 000	0.030	1 287.33
	2	40	65	1 000	0.030	1 284.53
	3	40	63	1 000	0.030	1 281.56
	4	40	62	1 000	0.030	1 280.00
	5	40	61	1 000	0.030	1 278.40
	6	40	58	1 000	0.030	1 273.31
	7	40	58	1 000	0.030	1 273.31
	8	40	55	1 000	0.030	1 267.74
	9	40	51	1 000	0.030	1 259.51
	10	40	48	1 000	0.030	1 252.67

1.4 给定票息、面值、债券价格和到期期限,到期收益率求解方法

根据式(1),令

$$f(y) = q - \frac{C}{(1+y)^i} - \frac{m}{(1+y)^n}$$

由此可知 $f(y)$ 单调上升。由于 $y > 0$, 故存在 y_1 使得 $f(y_1) < 0$ (事实上 $y = 0$ 时 $f(0) < 0$), 也存在 y_2 使得 $f(y_2) > 0$ 。根据函数的连续性可知必存在一点 y_0 使得 $f(y_0) = 0$ [5]。求解 y_0 的方法有 2 种:

1) 比例法(弦位法)。

若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上连续,且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 当 $a < x < b$ 时, $f(x) = 0$, 则方程

$$f(x) = 0 \quad (2)$$

于区间 (a, b) 内有,而且仅有一个实根。寻找该实根的计算方法如下。首先取

$$x_1 = a + 1$$

的值作为此根的第一个近似值,其中

$$1 = - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b - a)$$

进而在区间 (a, x_1) 或 (x_1, b) 内, 分别计算函数在 2 个端点的值, 对函数 $f(x)$ 在其两端异号的那个区间运用这种方法, 得到 的第二近似值 x_2 。由此类推, 对于第 n 个近似值 x_n 公式 (3) 正确。式 (3) 如下

$$|x_n - x_{n-1}| = \frac{|f(x_{n-1})|}{d} \quad (3)$$

其中: $d = \inf_{a < x < b} |f'(x)|$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ 。

2) 牛顿法(切线法)。

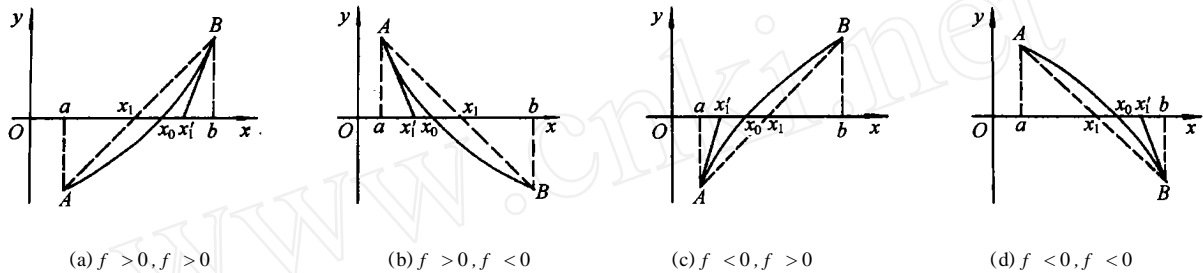


图 1 综合法图示

Fig. 1 Graphs of synthetic method

根据综合法理论, 对不同的 q, n, C 和 m , 编程计算相应的 y , 部分程序如下, 计算结果见表 4。

```

RANDOMIZE TIMER
CLS
PRINT q11 10
PRINT c , n , m , q , y
FOR k = 1 TO 20 STEP 1
c = 10 + FIX(RND * 40)
n = 10 + FIX(RND * 40)
m = 1000 + FIX(RND * 100) * 10
q = 1000 + FIX(RND * 100) * 10
f = 10000000
i = - 10000000
FOR x = 0 TO 9
y = x / 10
IF y = 0
THEN
d = c * n + m
ELSE
d = c / y * (1 - 1 / (1 + y) ^ n) + m / (1 + y) ^ n
END IF
IF d - q >= 0 AND d - q <= f
THEN
g = y
f = d - q

```

若在区间 (a, b) 内 $f(x) = 0$, 且 $f(a)f'(a) > 0$, 则可取数值 $x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ 作为方程 $f(x) = 0$ 的根 的第一个逼近值 x_1 。重复该方法, 很快就得到 趋近于式(2)的根 的一系列近似值 $x_n (n = 1, 2, 3 \dots)$ 。这些近似值可根据公式(3)来估计

3) 综合法。

同时应用弦位法与切线法从 x_0 的两侧接近于 x_0 , 从而可以加速计算近似根的过程(图 1)。

```

ELSE
END IF
NEXT x
FOR x = 0 TO 9
y = g + x / 100
IF y = 0
THEN
d = c * n + m
ELSE
d = c / y * (1 - 1 / (1 + y) ^ n) + m / (1 + y) ^ n
END IF
IF d - q >= 0 AND d - q <= f
THEN
o = y
f = d - q
ELSE
END IF
ENXT x
FOR x = 0 TO 9
y = o + x / 1000
IF y = 0
THEN
d = c * n + m
ELSE
d = c / y * (1 - 1 / (1 + y) ^ n) + m / (1 + y) ^ n

```

```

END IF
IF d - q >= 0 AND d - q <= f
THEN
g = y
f = d - q
ELSE
END IF
NEXT x
FOR x = 0 TO 9
y = g + x / 10000
IF y = 0
THEN
d = c * n + m
ELSE
d = c / y * (1 - 1 / (1 + y) ^ n) + m / (1 + y) ^ n
END IF
IF d - q >= 0 AND d - q <= f
THEN
o = y
f = d - q
ELSE
END IF
NEXT x
FOR x = 0 TO 9
y = o + x / 100000
IF y = 0
THEN
d = c * n + m
ELSE
d = c / y * (1 - 1 / (1 + y) ^ n) + m / (1 + y) ^ n
END IF
IF d - q >= 0 AND d - q <= f
THEN
g = y
f = d - q
ELSE
END IF
NEXT x
FOR x = 0 TO 9
y = g + x / 10000000
IF y = 0
THEN
d = c * n + m
ELSE
d = c / y * (1 - 1 / (1 + y) ^ n) + m / (1 + y) ^ n
END IF
IF d - q >= 0
THEN
IF d - q <= f
THEN
o = y
f = d - q
ELSE
END IF
ELSE
IF d - q >= i
THEN
ELSE
END IF
END IF
END IF

```

```

p = y
i = d - q
ELSE
END IF
END IF
NEXT x
PRINT c, n, m, q, o + p / 2
NEXT k
END

```

表4 不同债券价格、到期期限、票息、面值下的到期收益率

Table 4 The income rate at different bond price, term, coupon and face value

序号	票息 C/元	到期期限 n/a	面值 m/元	到期收益率 y	债券价格 q'/元
1	24	24	1 630	0.021	1 430.00
2	47	38	1 790	0.028	1 720.00
3	49	49	1 750	0.032	1 580.00
4	26	47	1 470	0.087	1 980.00
5	45	43	1 130	0.024	1 120.00
6	22	18	1 270	0.019	1 230.00
7	34	36	1 090	0.016	1 550.00
8	34	13	1 990	0.034	1 640.00
9	17	49	1 470	0.057	1 840.00
10	45	17	1 160	0.044	1 090.00

2 分析各参数对债券价格影响的有效方法

对债券价格公式进行分解

$$\begin{aligned}
 q &= \sum_{i=1}^n \frac{mr}{(1+y)^i} + \frac{m}{(1+y)^n} = \\
 &= \frac{mr}{1+y} \left(\frac{1 - \frac{1}{(1+y)^n}}{1 - \frac{1}{1+y}} \right) + \frac{m}{(1+y)^n} = \\
 &= \frac{mr}{y} - \frac{mr}{y(1+y)^n} + \frac{m}{(1+y)^n} = \\
 &= \frac{mr}{y} + \frac{m(y-r)}{y(1+y)^n} \quad (4)
 \end{aligned}$$

对式(4)进行数学分析,并利用表1~4的量化结果,得出以下结论。

1) 到期期限对债券价格的影响。

a. 当 $y > r$, 即到期收益率大于票息率时, 随着债券到期期限 n 的增加, 其债券价格 q 逐渐下降;

b. 当 $y < r$, 即到期收益率小于票息率时, 随着债券到期期限 n 的增加, 其债券价格 q 逐渐上升;

c. 当 $y = r$ 时, 对于任意的债券到期期限 n , 债券价格 q 均为定值;

d. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 债券价格为 mr/y 。

2) 债券价格、票息率和到期收益率之间的关系。

a. 当债券收益率 y 给定时, 由于 $q_r > 0$, 因此当票息率上升时债券价格也上升, 反之则下降;

b. 当票息率 r 给定时, 由于 $q_y < 0$, 因此当到期收益率上升时债券价格下降, 而当到期收益率下降时债券价格上升。

3) 票息率与债券价格的关系。

a. 由于 $1 - \frac{1}{(1+y)^n} > 0$, 因此当到期收益率 y 一定时, 票息率随债券价格的上升而上升, 随债券价格的下降而下降;

b. 当票息率一定时, 到期收益率与债券价格的变化关系为债券价格上升则到期收益率下降, 债券价格下降则到期收益率上升。

4) 债券到期期限和到期收益率对债券价格的影响。

设债券到期期限由 n_1 变为 n_2 , 到期收益率由 y_1 变为 y_2 , 则债券价格的变化可分解为:

$$\begin{aligned}
 q(n_1, y_1) - q(n_2, y_2) &= q(n_1, y_1) - q(n_1, y_2) + \\
 &= q(n_1, y_2) - q(n_2, y_2) = q(n_1, y_1) - \\
 &= q(n_2, y_1) + q(n_2, y_1) - q(n_2, y_2) \quad (5)
 \end{aligned}$$

式(5)表明, 债券价格的变化可以分解为两个部分, 这两部分分别是到期收益率的变化和债券到期期限的变化而引起的。

3 结束语

本文中从数学角度出发对债券市场价格与票面收益率、到期收益率以及到期期限各参数之间的关系, 给出了严格的论证, 并利用计算机进行数据处理及量化分析; 提出了分析各参数对债券价格影响的有效方法, 对指导金融市场有一定现实意义。

参 考 文 献

- [1] 黄 达. 货币银行学[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2000. 82 ~ 108
- [2] 叶永刚. 固定收入证券概论[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2001. 67 ~ 102
- [3] Bruce T. Fixed income securities[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1955. 15 ~ 8
- [4] Lawrence G. Financial Engineering (Review editon) [M]. London: Pitman Publishing, 1995. 107 ~ 139
- [5] Waller R. Principle of mathematical analysis[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Inc, 1976. 103 ~ 120