

平行刚性圆盘间有壁面滑移时宾汉流体的挤压流动

徐春晖 黄文彬 徐 泳
(中国农业大学 理学院,北京 100083)

摘 要 两平行刚性圆盘间流体的挤压流动模型是一个基本的力学模型。流体与壁面存在滑移会对挤压黏性力产生影响。以 Reynolds 润滑理论为基础,研究了存在滑移时两刚性圆盘间宾汉流体的挤压流动。研究表明,随着滑移参数的增加,挤压黏性力减小,流体刚性层厚度增加;当滑移参数趋于无穷大时,所有流体都处于刚性运动状态,此时的挤压黏性力与两刚性圆盘挤压理想刚塑性介质时的情况相同。

关键词 挤压流动;宾汉流体;滑移;润滑理论

中图分类号 O 347.7; O 373

文章编号 1007-4333(2003)02-0007-04

文献标识码 A

Squeeze flow of bingham fluid between two parallel disks with wall slip

Xu Chunhui, Huang Wenbin, Xu Yong

(College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract Squeeze flow between two disks is a classical mechanics model. Wall slip will affect the magnitude of squeeze viscous force. Based on the Reynolds' lubrication theory, squeeze flow between two parallel plates of a Bingham fluid with partial wall slip was considered. The results showed that the squeeze viscous force decreases with the slip parameter increases, the rigid region of the fluid increases with the slip parameter increases. When the slip parameter tends to infinit, the results of squeeze viscous force will be reduced to the case of the squeeze flow of rigid-plastic solid between two parallel disks.

Key words squeeze flow; Bingham fluid; slip; lubrication theory

两圆盘间流体的挤压流动是一个经典问题,涉及到不少工程应用。对两圆盘间流体的挤压分析是进行更复杂的圆球和平壁、圆球和圆球间流体挤压分析的基础,而后二者是用离散元法(DEM)模拟湿散体力学行为颗粒法向作用的理论基础。

挤压研究始于1874年Stephan^[1]对两平行刚性圆盘间牛顿流体的挤压研究,其后有一些关于无滑移情况下平行圆盘间牛顿或非牛顿流体挤压流动的文献发表^[2,3]。涉及壁面滑移的文章较少,其中,Laun等^[4]研究了两圆盘间牛顿及幂律流体的挤压流动,黄文彬等^[5,6]研究了存在滑移时刚性圆球间牛顿及幂率流体的挤压流动,Sherwood^[7]研究了圆盘挤压幂率流体及刚塑性介质时的挤压力,作者在

文献[8]中讨论了滑移对两圆盘间二阶流体挤压流动的影响。

对于壁面滑移机制的研究和解释,已有详细的说明^[9~12],这里不再介绍。本文中主要研究滑移对挤压流动的影响。

1 基本方程和边界条件

图1为圆盘间挤压流动的示意图。设两平行刚性圆盘半径为 R ,间隙为 $2H$, $R/H \gg 1$,上下盘均以垂直于圆盘的速度 v_d 靠近,圆盘间介质为宾汉流体。

假定问题是定常的,略去对流项等高阶量,并假定压力 p 与纵坐标 z 无关,即 $p = p(r)$ 。流体的动量方程简化为

收稿日期:2002-11-19

基金项目:国家自然科学基金资助项目(19972075)

作者简介:徐春晖,博士研究生;黄文彬,博士生导师,教授,主要从事弹塑性力学、离散元等研究。

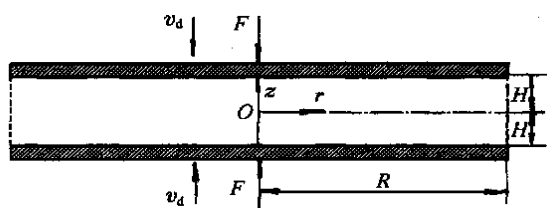


图 1 平行圆盘间宾汉流体的挤压流动

Fig. 1 Squeeze flow of bingham fluid between two parallel disks

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \quad (1)$$

其中: p ——压力;

τ_{rz} ——剪应力分量。

假定流体不可压缩,则连续方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{dv_z}{dz} = 0 \quad (2)$$

式中: v_r 和 v_z 分别为流体径向、法向速度分量。

宾汉流体的本构方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0 & | \tau_{rz} | = 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{1}{\mu_p} \text{sign}(\tau_{rz}) (| \tau_{rz} | - \tau_0) & | \tau_{rz} | > 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中: τ_0 ——屈服应力;

μ_p ——塑性黏度系数;

$\dot{\gamma}$ ——剪切应变率。

根据文献[4]中圆盘间牛顿流体挤压流动的滑移规律,本文中采用 $v_r = (| \tau_{rz} | - \tau_0)$ 为滑移边界条件,即

$$\left. \begin{aligned} v_r &= (| \tau_{rz} | - \tau_0), v_z = v_d & z = -H \\ v_r &= - (| \tau_{rz} | - \tau_0), v_z = -v_d & z = H \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: λ 为比例常数,称为滑移系数。

边界条件式(4)是在假设 $| \tau_{rz} | > \tau_0$ 的情况下给出的,若 $| \tau_{rz} | \leq \tau_0$,则边界条件为 $v_r = 0$,此时 $z = \pm H$ 。

2 压力分布和挤压黏性力

根据模型的对称性可知,在 $z = 0$ 处, $\tau_{rz} = 0$;积分动量方程式(1),得

$$\tau_{rz} = \frac{dp}{dr} z \quad (5)$$

将式(5)代入本构方程式(3),积分并由边界条件式(4)得

$$v_r = \mu_p^{-1} \left[- \frac{dp}{dr} \right] \times \begin{cases} - \frac{1}{2} z^2 + t(z - H) + \frac{1}{2} H^2 + \mu_p(H - t) & -t \leq z \leq H \\ v_0(r) & -t \leq z \leq t \\ - \frac{1}{2} z^2 - t(z + H) + \frac{1}{2} H^2 + \mu_p(H - t) & -H \leq z \leq -t \end{cases} \quad (6)$$

其中: $2t$ 为 $z = 0$ 刚性层的厚度, t 为半刚性层厚度满足关系

$$t = 0 \left[- \frac{dp}{dr} \right]^{-1} t H \quad (7)$$

$v_0(r)$ 是待定函数,由速度的连续性得

$$v_0(r) = \frac{(H - t)^2}{2} + \mu_p(H - t) \quad (8)$$

将 v_r 的表达式代入连续方程式(2),并结合边界条件(4),得

$$\bar{t}^3 - 3(1 + d\bar{r} + 2\bar{r})\bar{t} + 2(1 + 3\bar{r}) = 0 \quad (9)$$

其中: $\bar{t} = \frac{t}{H}$, $\bar{r} = \frac{r}{R}$, $d = \frac{\mu_p v_d R}{0 H^2}$, $\lambda = \frac{\mu_p}{H}$,均为量纲 1 参数,称为量纲 1 滑移参数。式(8)为卡尔丹方程,因 $0 < \bar{t} < 1$,满足条件的显式解为

$$\bar{t} = 2^{-1/3} \cos(\theta + 4/3) \quad (10)$$

特别地,当 $\bar{r} = 0$ 时, $\bar{t} = 1$,其中

$$\begin{aligned} &= (1 + d\bar{r} + 2\bar{r})^{3/2} \\ &= \frac{1}{3} \arccos \left[- \frac{1 + 3\bar{r}}{2} \right] \end{aligned}$$

假设接触边界处的压力为 0,进而根据式(6)可求得圆盘上的压力分布

$$p(\bar{r}) = p_0 \bar{p}(\bar{r}) = p_0 \left[\int_0^1 \frac{1}{\bar{t}(\bar{r})} d\bar{r} - \int_0^{\bar{r}} \frac{1}{\bar{t}(\bar{r})} d\bar{r} \right] \quad (11)$$

其中: $p_0 = 0 R / H$ 。

当 $\tau_0 = 0$ 时,宾汉流体退化为牛顿流体,此时, $t = 0$,即刚性层厚度为 0,全部流体处于流动状态,求解压力分布时,不能直接由式(10)计算,因为方程(9)已不再成立。将 $t = 0$ 代入式(6),得到圆盘间为牛顿流体时挤压流动的速度场

$$v_r = \mu_p^{-1} \left[- \frac{dp}{dr} \right] \left[- \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2} H^2 + \mu_p H \right] \quad (12)$$

结合式(12)和连续方程式(2)可得圆盘挤压牛顿流体时的压力分布

$$p(\bar{r}) = \frac{3 v_d \mu_p R^2}{4 H^3} \frac{1}{1 + 3} (1 - \bar{r}^2) \quad (13)$$

式(13)与文献[4]中的压力分布解一致。

当时, $\bar{t} = 1$, 全部流体处于刚性状态, 作类似固体的运动, 此时, 式(11)为两平行圆盘挤压理想刚塑性介质时的结果, $\bar{p}(\bar{r}) = 1 - \bar{r}^{1/3}$ 。

将式(11)在流体圆盘接触面上积分, 可得圆盘上的挤压黏性力

$$F = 2 \int_0^R p(r) r dr = F_0 f(\bar{r}) \quad (14)$$

其中: $F_0 = \int_0^R R^3 / H$, 量纲 1 的挤压黏性力用 f 表示为

$$f(\bar{r}) = \frac{1}{2} \frac{\bar{r}^2}{\bar{t}(\bar{r})} d \bar{r} \quad (15)$$

积分式(13)得圆盘挤压牛顿流体时的黏性力

$$F = \frac{3}{8} \frac{R^4 \mu_p v_d}{H^3} \frac{1}{1+3} \quad (16)$$

挤压黏性力解式(16)与文献[4]中的结果一致。

当时, $t = 1$, 此时式(16)为两平行圆盘挤压理想刚塑性介质时的结果, $f = 1/3$, 与文献[7]结果相同。

3 数值分析

根据前面对量纲 1 参数 d 的定义可知, d 为与流体物性、圆盘半径、圆盘间隙以及运动速度有关的综合参数。当流体物性、圆盘半径和圆盘间隙给定时, d 的变化反映两圆盘相对运动速度的变化, 而当圆盘半径、圆盘间隙及相对运动速度给定时, d 的变化反映流体物性的变化, ……。

由式(9)和(14)可以看出, 刚性层厚度 $2t$ 及挤压力仅与 d 和量纲 1 滑移参数 α 有关, 因此需要考虑的参数大大减少。

无滑移时, 量纲 1 半刚性层厚度 \bar{t} 随 \bar{r} 的变化曲线见图 2。可见, 当 d 一定时, \bar{t} 随着 \bar{r} 的增大而减小, 而当 \bar{r} 一定时, \bar{t} 随着 d 的增大而减小。

$d = 5.0$ 时 \bar{t} 随 \bar{r} 的变化曲线见图 3。由图 3 可见, α 增大, \bar{t} 增大, 这是由于滑移导致压力减小的缘故。当剪应力小于屈服应力时, 流体处于刚性状态, 做类似固体的运动; 当时, $\bar{t} = 1$, 这时, 全部流体处于刚性状态, 相当于两圆盘挤压理想刚塑性介质时的情况。

量纲 1 挤压黏性力 f 随 α 的变化曲线见图 4。

$\alpha = 0$ 为无滑移, f 取得最大值; α 越大, 表示滑移越大, 随着 α 的增大, f 减小, 即滑移使得挤压黏性力减小。从理论上讲, α 的取值范围为 $0 < \alpha < \infty$, 当时, $\bar{t} = 1$, 此时圆盘间的流体都处于刚性状

态, 做类似固体的运动, 挤压黏性力结果与两平行圆盘挤压理想刚塑性介质时的结果相同, 即 $f = 1/3$ 。

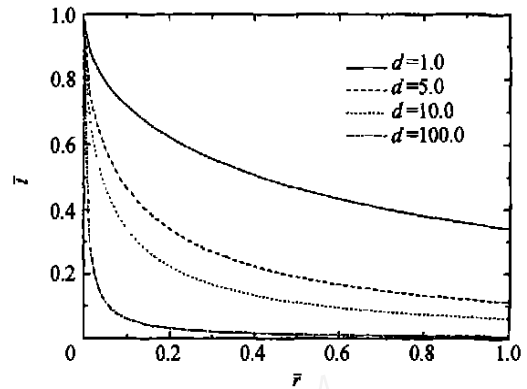


图 2 无滑移时量纲 1 半刚性层厚度 \bar{t} 的分布

Fig. 2 Distribution of the dimensionless half depth of the rigid region \bar{t} with no slip

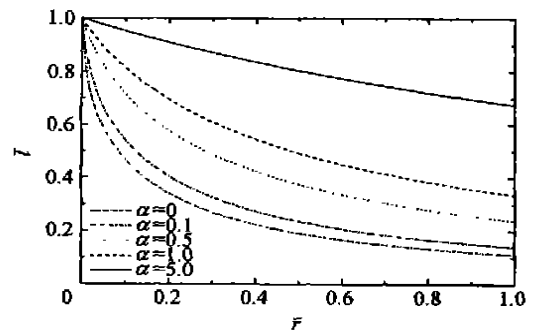


图 3 $d = 5.0$ 时量纲 1 半刚性层厚度 \bar{t} 的分布

Fig. 3 Distribution of the dimensionless half depth of the rigid region \bar{t} when $d = 5.0$

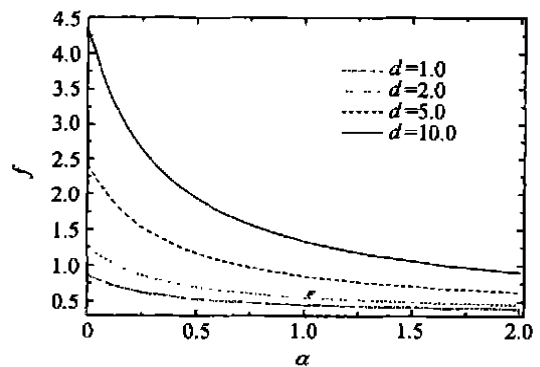


图 4 量纲 1 滑移参数 α 对量纲 1 黏性力 f 的影响

Fig. 4 Effect of α on dimensionless viscous force f

4 结论

1) 对存在滑移时两平行刚性圆盘间宾汉流体的

挤压流动进行了研究,得到了流体刚性区和挤压黏性力的公式。

2)随着滑移参数的增大,挤压黏性力减小,流体的刚性层厚度增加;当滑移参数趋于无穷大时,所有的流体都处于刚性运动状态,此时挤压黏性力与两刚性圆盘挤压理想刚塑性介质时的情况相同。

滑移参数与流体及圆盘本身的性质有关,有关这方面的研究需进一步试验的验证。

参 考 文 献

- [1] Bird R B, Armstrong R C, Hassager O. Dynamics of polymeric liquids[M]. New York: Wiley, 1977. 19 ~ 21
- [2] Scott J R. Theory and application of the parallel plate viscometer[J]. Trans Inst Rubber Ind, 1931, 7(2): 169 ~ 186
- [3] Davis A M J, Frenkel A L. Cylindrical liquid bridges squeezed between parallel plates: exact Stokes flow solutions and hydrodynamic forces[J]. Phys Fluids A, 1992, 4(6): 1105 ~ 1109
- [4] Laun H M, Rady M, Hassager O. Analytical solutions for squeeze flow with partial wall slip[J]. J Non-Newtonian Fluid Mech, 1999, 81(1-2): 1 ~ 15
- [5] 黄文彬,徐 泳,练国平. 有壁面滑移时刚性圆球颗粒间流体的挤压流动[J]. 中国农业大学学报, 2001, 6(6): 27 ~ 31
- [6] 黄文彬,徐 泳,练国平,等. 存在滑移时两圆球间幂率流体挤压流动[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(7): 722 ~ 728
- [7] Sherwood J D, Durban D. Squeeze flow of a power-law viscoplastic solid [J]. J Non-Newtonian Fluid Mech, 1996, 62: 35 ~ 54
- [8] Xu Chunhui, Huang Wenbin, Xu Yong. Squeeze flow of a second-order fluid between two parallel disks with wall slip[J]. Transactions of the CSAE, 2002, 18(5): 19 ~ 22
- [9] Mooney M. Explicit formulae for slip and fluidity[J]. J Rheol, 1931, 2(2): 210 ~ 222
- [10] Atwood B T, Schowalter W R. Measurement of slip at the wall during the flow of high density polyethylene through a rectangular conduit[J]. Rheol Acta, 1989, 28(2): 134 ~ 146
- [11] Kranik A M, Schowalter W R. Slip at the wall and extrudate roughness with aqueous solutions of polyvinyl alcohol and sodium borate[J]. J Rheol, 1981, 25(1): 95 ~ 114
- [12] Ramamurthy A V. Wall slip in viscous fluids and influence of material construction[J]. J Rheol, 1986, 30(2): 337 ~ 357