中国农业大学学报 2002, 7(6): 1～4
Journal of China Agricultural University

具有预先给定极点的有理函数插值问题的 Hermite 型插值公式①

杨正宏②
(中国农业大学工程基础科学部)

摘　要　对 G. Heinig 在单指标情形给出的具有预先给定极点的有理函数插值问题的 Lagrange 公式进行了改进。将改进后的结果推广到了多重插值指标情形, 得到具有预先给定极点的有理函数插值问题的 Hermite 型显式插值公式, 并指出了该问题与带重点的 Cauchy 矩阵的联系。

关键词　Cauchy 矩阵; 有理插值; Hermite 型插值公式
中图分类号　O 241.3

Hermite-type Interpolation Formula for Rational Function Interpolation Problem With Prescribed Poles

Yang Zhenghong
(College of Applied Engineering Sciences, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract　In the case of simple nodes, a Lagrange-type interpolation formula for rational function interpolation problem with prescribed poles was developed. The present paper generalizes this formula to the case of multiple nodes. The connection between the above interpolation problem and confluent Cauchy matrix is also pointed out.

Key words　Cauchy matrix; rational interpolation; Hermite-type interpolation formula

1　问题的提出

有理函数插值问题是插值问题的重要分支, 它在数值分析、计算数学、函数逼近论中都有重要应用, 而具有预先给定极点的有理函数插值无疑又是最基本的一类。设 $p(x) = \prod_{j=1}^{q}(x - d_j)^{\sigma_j}$ 给定, $\sum_{j=1}^{q}\sigma_j = n$, 多项式 $q(x)$ 待定且次数小于 n, $f(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ 是一具有固定极点 d_j (重数为 σ_j) 的严格真正(分子次数小于分母次数) 有理函数。给定指标集 $\{(c_i, \rho_i)\}_{i=1}^{p}$, 现要求 $f(x)$ 满足条件

$$\frac{1}{k!}f^{(k)}(c_i) = \eta_{ik} \quad i = 1, 2, \cdots, p; \ k = 0, 1, \cdots, \rho_i - 1 \tag{1}$$

其中: η_{ik} 给定, 则问题(1) 称为具有预先给定极点的有理函数插值问题。本文中总假定所有 c_i 与 d_j 两两互不相同, 且 $\sum_{i=1}^{p}\rho_i = \sum_{j=1}^{q}\sigma_j = n$。

收稿日期: 2002-05-16
①国家自然科学基金资助项目(10271018)
②杨正宏, 北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区) 71 信箱, 100083

将 $f(x)$ 作部分分式分解

$$f(x)=\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=0}^{\sigma_j-1}\frac{\xi_{jl}}{(x-d_j)^{l+1}}$$

则不难验证, 式(1)等价于求解下面线性方程组

$$C(c,d)\xi=\eta \tag{2}$$

其中

$$C(c,d)=(C_{ij})_{i,j=1}^{p,q},\quad C_{ij}=(C_{ij}^{kl})_{k=0,l=0}^{\rho_i-1,\sigma_j-1}$$

是对应于指标集 $\{(c_i,\rho_i)\}_{i=1}^{p}$ 和 $\{(d_j,\sigma_j)\}_{j=1}^{q}$ 的带重点的 Cauchy 矩阵, 其中

$$C_{ij}^{kl}=\frac{1}{k!\ l!}\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l}\left[\frac{1}{x-y}\right]_{x=c_i,y=d_j}=\binom{k+l}{k}\frac{(-1)^k}{(c_i-d_j)^{k+l+1}} \tag{3}$$

$\xi=\mathrm{col}[\mathrm{col}(\xi_{jl})_{l=0}^{\sigma_j-1}]_{j=1}^{q}$ 待求, $\eta=\mathrm{col}[\mathrm{col}(\eta_{ik})_{k=0}^{\rho_i-1}]_{i=1}^{p}$ 给定, $\mathrm{col}(a_i)$ 表示以 a_i 为分量的列向量(下同)。

带重点的 Cauchy 矩阵是笔者在文献[1～3]中重点讨论的问题, 其中核心问题之一就是如何求解线性方程组(2)或求 $C(c,d)$ 的逆。如果求出了 $C(c,d)^{-1}$, 则问题(1)的解可表示为

$$f(x)=\left(\frac{1}{x-d_1},\cdots,\frac{1}{(x-d_1)^{\sigma_1}},\cdots,\frac{1}{x-d_q},\cdots,\frac{1}{(x-d_q)^{\sigma_q}}\right)C(c,d)^{-1}\eta \tag{4}$$

笔者求 $C(c,d)^{-1}$ 的方法是基于 $C(c,d)$ 满足位移(displacement)结构方程而得到的。例如, 在单指标情形($\rho_i=\sigma_j=1$)下, $C(c,d)=\left(\frac{1}{c_i-d_j}\right)_{i,j=1}^{n}$, 满足以下 Sylvester 型矩阵方程

$$D(c)C(c,d)-C(c,d)D(d)=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}[1\quad 1\quad\cdots\quad 1] \tag{5}$$

其中, $D(c)=\mathrm{diag}(c_i)_{i=1}^{n}$, $D(d)=\mathrm{diag}(d_j)_{j=1}^{n}$ 分别表示以 c_i 和 d_j 为对角元的对角矩阵。式(5)两边分别左乘、右乘 $C(c,d)^{-1}$, 并令 $u=\mathrm{col}(u_i)_{i=1}^{n}$, $v=\mathrm{col}(v_j)_{j=1}^{n}$ 分别是以下两个线性方程组的解

$$C(c,d)u=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},\quad v^{\mathrm{T}}C(C,d)=[1\quad 1\quad\cdots\quad 1]$$

则不难验证, 有

$$C(c,d)^{-1}=-\mathrm{diag}(u_i)_{i=1}^{n}C(d,c)\mathrm{diag}(v_j)_{j=1}^{n}$$

上述通过求 $C(c,d)^{-1}$ 而得到的插值公式(4)是一种非显式的公式, 因为怎样求 u_i 与 v_j 还需要进一步讨论。注意到文献[4]和[5]在单指标情形给出了问题(1)的一种类似于多项式插值的 Lagrange 型插值公式, 这是一种显式公式, 其结果为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{u(x)}{x-c_i}\frac{1}{u'(c_i)}\eta_i \tag{6}$$

其中

$$u(x)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(x-c_i)}{\prod_{j=1}^{n}(x-d_j)},\quad u'(c_i)=\frac{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(c_i-c_k)}{\prod_{j=1}^{n}(c_i-d_j)}\tag{7}$$

本文中的研究目的就是要将式(6)推广到 c_i 和 d_j 都为多重指标的情形, 即得到具有给定极点的有理函数插值问题的 Hermite 插值公式。

2　主要结果

分析式(6)发现, $f(x)$ 的表达式完全取决于式(7)中的 $u(x)$, 而 $u(x)$ 恰好是问题(1)在单指标情形时对应的齐次问题: $f(c_i)=0\,(i=1,\cdots,n)$ 在以 d_j 为一阶极点、分子次数不超过分母次数的真正有理函数空间内的解, 因而式(6)实际上就是通过齐次问题的解来得到非齐次问题的解。基于这种思想, 完全可以把式(6)推广到 c_i 和 d_j 都为重指标的情形。令

$$E(x)=\mathrm{Span}\left\{\frac{1}{x-d_1},\cdots,\frac{1}{(x-d_1)^{\sigma_1}},\cdots,\frac{1}{x-d_q},\cdots,\frac{1}{(x-d_q)^{\sigma_q}}\right\}\tag{8}$$

式(8)是由基本有理因子 $\frac{1}{(x-d_j)^{l+1}}$ 生成的线性空间, 它代表了以 d_j 为 σ_j 重极点的严格真正有理函数全体。又令 $E(x)=E(x)+xE(x)$, 则 $E(x)$ 代表以 d_j 为 σ_j 重极点的真正有理函数全体。以下结论显然成立。

定理 1　问题(1)对应的齐次问题

$$\frac{1}{k!}f^{(k)}(c_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,p;\quad k=0,1,\cdots,\rho_i-1)\tag{9}$$

在 $E(x)$ 内有解

$$u(x)=\frac{\prod_{i=1}^{p}(x-c_i)^{\rho_i}}{\prod_{j=1}^{q}(x-d_j)^{\sigma_j}},\tag{10}$$

且除了常数乘法因子外, 解是唯一的。以下给出笔者研究所得到的主要结果。

定理 2　问题(1)在 $E(x)$ 内有唯一的解

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{\rho_i-1}\eta_{ik}E_{ik}(x)\tag{11}$$

其中, $u_i(x)=\frac{u(x)}{(x-c_i)^{\rho_i}}$, $u(x)=\frac{\prod_{i=1}^{p}(x-c_i)^{\rho_i}}{\prod_{j=1}^{q}(x-d_j)^{\sigma_j}}$,

$$E_{ik}(x)=u_i(x)\left[\frac{1}{(\rho_i-1-k)!}\left(\frac{1}{u_i(\xi)}\right)^{(\rho_i-1-k)}(x-c_i)^{\rho_i-1}+\cdots+\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{u_i(\xi)}\right)'(x-c_i)^{k+1}+\frac{1}{u_i(\xi)}(x-c_i)^{k}\right]\Bigg|_{\xi=c_i}\tag{12}$$

证明　只需检验式(12)中的 $E_{ik}(x)$ 满足基本插值条件

$$\frac{1}{l!}E_{ik}^{(l)}(x)\Big|_{x=c_j}=\delta_{ij}\delta_{kl}\tag{13}$$

其中: δ_{ij}, δ_{kl} 为 Kronecker 符号。事实上, 由于 $u_i(x)$ 含有除 $(x-c_i)^{\rho_i}$ 之外的所有其他因子, 因此, 当 $i\neq j$ 时, 式(13)左边恒为 0; 当 $i=j$ 时, 由式(12)知, c_i 是 $E_{ik}(x)$ 的 k 阶零点, 所以, 当 $l<$

k 时, 式(13)的左边也为 0; 而当 $l \geq k$ 时, 由 Leibniz 求导法则, 有

$$\frac{1}{l!} E_{ik}^{(l)}(x) \Big|_{x=c_i} = u_i(c_i) \frac{1}{(l-k)!} \left(\frac{1}{u_i(\xi)} \right)^{(l-k)} + u_i'(c_i) \frac{1}{(l-k-1)!} \left(\frac{1}{u_i(\xi)} \right)^{(l-k-1)} + \cdots +$$

$$\frac{1}{(l-k)!} u_i^{(l-k)}(c_i) \frac{1}{u_i(\xi)} \Big|_{\xi=c_i} = \frac{1}{(l-k)!} \left[u_i(\xi) \frac{1}{u_i(\xi)} \right]_{\xi=c_i}^{(l-k)} = \frac{1}{(l-k)!} [1]^{(l-k)} = \delta_{kl}$$

所以, 式(13)成立。

关于唯一性的证明, 若除了式(11)中的 $f(x)$ 外, 还另有 $g(x) \in E(x)$ 也满足式(1), 则 $f(x) - g(x)$ 是其次问题式(9)的解。根据定理 1, 有 $f(x) - g(x)$ 是 $u(x)$ 的常数倍, 这显然是矛盾的。因为 $f(x) - g(x)$ 是严格真正的, 而 $u(x)$ 是真正的, 所以, 唯一性得证, 证毕。

当 $\rho_i = \sigma_j = 1$ 时, 式(11)退化为式(6)。

参 考 文 献

1 Yang Zhenghong, Chen Gongning. Generalized-confluent Cauchy and Cauchy-Vandermonde matrices, Linear Algebra Appl, 2000, 308: 31～64

2 Yang Zhenghong, Hu Yongjian. Displacement structure approach to Cauchy and Cauchy-Vandermonde matrices: inversion formulas and fast algorithm. J Comput Appl Math, 2002, 138: 259～272

3 杨正宏. 带重点的广义 Cauchy 矩阵. 见: 李大潜主编. 中国工业与应用数学协会(CSIAM). 第六次大会论文集. 北京: 北京大学出版社, 2000. 301～306

4 Heinig G, Al-Musallam F. Lagrange's formula for tangential interpolation with application to structured matrices. Integeral Equation Operator Theory, 1998, 30(1): 83～100

5 Muhlbach G. On Hermite interpolation by Cauchy-Vandermonde systems: the Lagrange formula, the adjoint and the inverse of Cauchy-Vandermonde matrix, J Comput Appl Math, 1996, 67: 147～159