

## 指数窗对阻尼识别的影响

王凤竹

(中国农业大学工程基础科学部)

**摘要** 采用理论分析和数值模拟相结合的方法,考察了指数窗对阻尼估计的影响,探讨了脉冲响应加窗后的傅里叶变换特性,研究了窗截断对变换的影响,导出了阻尼比较正公式。研究结果表明,加指数窗对半功率点法估计的阻尼有显著影响,但对频率识别影响较小,所提出的阻尼比较正公式,能明显改善阻尼的估计精度。

**关键词** 阻尼; 频响函数; 傅里叶变换

**中图分类号** O 321

## Effect of Exponential Window on Damping Estimation

Wang Fengzhu

(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

**Abstract** Sampling truncation and adding exponent window to pulse response (PR) are two important factors interfering the repeatability of damping measurement. They were investigated by theoretical analysis and numerical simulation. The characteristics of Fourier transform of PR with exponent window were also discussed, and rectification equation of damping estimation was deduced. The study results show that firstly, the precision of damping estimation is influenced by the exponent window significantly, but not of natural frequency, secondly, the damping rectification equation can improve precision of damping measurement highly.

**Key words** damping; frequency response function; fourier transform

阻尼的识别是动力分析中一个棘手的问题。刚度矩阵和质量矩阵通常可用有限元等理论方法计算出来,而阻尼矩阵的求解则很困难,这是由于产生阻尼的机理很复杂,而且表现形式多种多样。也正因为如此,很多动力分析软件只能提供阻尼的模式频率和模式振型信息。一般说来,阻尼或多或少都具有一定程度的非线性,但因为线性问题的求解和参数确定远比非线性问题容易,因而,阻尼模型多采用黏性阻尼形式或者等效黏性阻尼形式,然后通过模态试验分析确定真实阻尼<sup>[1]</sup>。

自由衰减法是一种非常直观的测量阻尼的方法,但一般只适用于单自由度系统,虽改进后也可用于2自由度情形<sup>[2]</sup>,但用于多自由度情形时,需配合带通滤波器将模态逐一分离。工程中存在大量的稀疏模态多自由度系统,对于这类系统,在某阶主导频段上可忽略其他阶模态的

收稿日期: 2000-11-17

王凤竹,北京清华东路17号中国农业大学(东校区)74信箱,100083

影响,也就是每阶模态可接单自由度方法来处理,因而频域法在模态参数识别方面占据统治地位,其中半功率点法最为直观,运算量也较小。

锤击法是测量频响函数的重要方法之一,它将冲击力和响应时间历程记录后经快速傅里叶变换(FFT)变为频域数据。由于该方法所需的设备较少,且操作简单,因而在工程测量中得到广泛的应用。但是用于小阻尼系统时存在如下2个问题:

1)小阻尼系统的冲击响应持续时间很长,由于分析仪的内存和采样定理的限制,只能对有限时段内的数据加以分析,这就要对响应进行截断,由此必然带来附加的虚假阻尼。此时,对阻尼为0的极端情形,无论采用模态圆法还是半功率点法,估计的表观阻尼均不为0,这种结果完全是由截断造成的。

2)FFT存在栅栏效应,一般来说对频率的精度影响不大,但对小阻尼系统,固有频率处的幅频曲线十分尖锐。图1示出在离散谱线上确定的半功率点( $H_m$ 为从幅频离散谱线上找出的谱峰值,由于FFT栅栏效应的存在, $H_m$ 几乎总是低于真实的谱峰高度)。频率的微小误差可造成总功率估计的显著误差,而即使对这个有误差的总功率,在FFT离散谱线中找到恰好的半功率点也很困难,采用其他近似措施将进一步加大误差,为此本文中采用了加指数窗的识别方法。

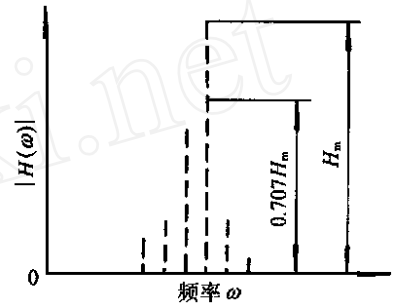


图1 离散谱线上的半功率点

## 1 指数窗

为讨论简单,仅考虑单自由度系统

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (1)$$

其脉冲响应函数

$$h(t) = 1/[\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}]^{-1} \exp(-\zeta\omega_n t) \sin[\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t] \quad (2)$$

其傅里叶变换即为频响函数

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (3)$$

式(2)的脉冲响应持续时间为无限,因而式(3)的积分上限为无穷大。但是实际只能得到  $h(t)$  在有限时段  $[0, T]$  上的离散抽样值,因而式(3)只能近似计算。很显然,这必然要求阻尼足够大,以至当脉冲响应持续时间大于  $T$  的  $h(t)$  对变换的贡献可以忽略。对小阻尼系统,这意味着  $T$  要很大,因而很难实现,故通常加一个指数窗来加速衰减(指数窗的另一个作用是降低衰减函数尾端的低信噪比部分的影响权重)。令指数窗为  $\exp(-\eta\omega_n t)$  ( $\eta > 0$ ),则加窗后的脉冲响应函数

$$h_w(t) = 1/[\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}]^{-1} \exp[-(\zeta+\eta)\omega_n t] \sin[\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t] \quad (4)$$

式中:  $\zeta+\eta$  决定了  $h_w(t)$  的衰减程度。

## 2 衰减振荡曲线的傅里叶变换特性

为了讨论方便,记

$$\left. \begin{aligned} a &= (\eta_+ \zeta) \omega_h \\ b &= \omega_h (1 - \zeta^2)^{1/2} \\ c &= [\omega_h (1 - \zeta^2)^{1/2}]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

则式(4)可简记为  $h_w(t) = c \exp(-at) \sin(bt)$ , 经过一系列的推导可求得  $h_w(t)$  的傅里叶变换

$$H_w(\omega) = cb / [b^2 - (\omega - ja)^2] \quad (6)$$

由于速度频响函数的幅频曲线峰值点精确地对应固有频率  $\omega_h$ , 半功率带宽为  $2\zeta\omega_h$ , 所以这里仍考虑  $h_w(t)$  的导函数  $h_{w,v}(t)$  (类似速度的概念) 的频响特性。利用傅里叶变换的性质, 由式(6)可得速度频响函数

$$H_{w,v}(\omega) = jcb\omega / [b^2 - (\omega - ja)^2]$$

相应的幅值为

$$|H_{w,v}(\omega)| = cb \sqrt{\left[ \frac{b^2 + a^2}{\omega} - \omega \right]^2 + 4a^2}^{1/2}$$

很显然峰值点的频率  $\omega_h = (a^2 + b^2)^{1/2}$  (此时频响函数的虚部为 0, 实部取极值), 利用式(5)有

$$\omega_h = \omega (1 + 2\zeta\eta_+ \eta)^{1/2} \quad (7)$$

根据式(7)加指数窗后, 峰值点频率  $\omega_h$  不再精确等于  $\omega$ , 不过由于  $\zeta$  和  $\eta$  都很小, 因而二者相差不大。利用

$$|H_{w,v}(\omega)| = |H_{w,v}(\omega_h)| / \sqrt{2} = cb / (2\sqrt{2}a)$$

可得正频率段的 2 个半功率点  $\omega_{1,2} = \pm a + (b^2 + 2a^2)^{1/2}$  (此时频响函数的实部和虚部恰好相等), 因而  $|\omega - \omega| = 2a$ 。利用半功率点参数计算的表观阻尼比

$$\zeta_g = \frac{|\omega - \omega|}{2\omega_h} = \frac{a}{(b^2 + a^2)^{1/2}}$$

利用式(5)有

$$\zeta_g = \frac{\eta_+ \zeta}{(1 + 2\eta_+ \zeta \eta)^{1/2}} \quad (8)$$

与式(7)不同, 表观阻尼比与真实阻尼比之间的近似程度受到指数窗参数  $\eta$  的严重影响。当  $\eta$  比较小时, 式(8)可简化为  $\zeta_g = \eta_+ \zeta$  这表明估计出的表观阻尼一定要减去所加的指数窗阻尼。还可以进一步证明

$$\text{Im}^2(H_{w,v}(\omega)) + [\text{Re}(H_{w,v}(\omega)) - cb/(4a)]^2 = [bc/(4a)]^2 \quad (9)$$

这是一个精确的圆。

应该指出, 当采用位移频响函数和加速度频响函数时, 类似于式(7)和(8), 不再像式(9)那样, 虚部和实部的矢端构成一个精确的圆。此外, 若先求导再加指数窗, 式(7)和(8)也稍有差异。

### 3 指数窗的误差分析

当  $\eta$  不足够大时, 窗截断的影响会明显的表现出来。将  $[0, T]$  上积分的近似结果记为  $H_{w,T}(\omega)$ , 即  $H_{w,T}(\omega) = \int_0^T h_w(t) \exp(-j\omega t) dt$  可以证明

$$H_{w,T}(\omega) = H_w(\omega) \{1 - \exp(-aT - j\omega T) [\cos(bT) + b^{-1}(a + j\omega) \sin(bT)]\}$$

$H_{w,T}(\omega)$  和  $H_w(\omega)$  的相对误差记为  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_r = |H_{w,T}(\omega) - H_w(\omega)| / |H_w(\omega)|$ , 则有

$$\epsilon_T = b^{-1} \exp(-aT) \left| b \cos(bT) + a \sin(bT) + j\omega \sin(bT) \right| = b^{-1} \exp(-aT) [b^2 \cos^2(bT) + (a^2 + \omega^2) \sin^2(bT) + 2ab \cos(bT) \sin(bT)]^{1/2}$$

这表明  $(\eta + \zeta)T$  越大误差越小, 即阻尼比越大, 采样时段越长, 近似程度越高; 当然误差大小还受到采样时间间隔的影响。

讨论: 1)  $\sin(bT) = 0$  意味着半整周期采样, 此时相对误差与  $\omega$  无关, 即  $\epsilon_T = \exp(-aT)$ ; 2) 通常  $a$  相对于  $b$  很小, 略去它在开方中的贡献有  $\epsilon_T = b^{-1} \exp(-aT) [b^2 \cos^2(bT) + \omega^2 \sin^2(bT)]^{1/2}$ ; 3) 一般仅对共振峰附近即  $\omega = b$  处的频响感兴趣, 此处有  $\epsilon_T = \exp(-aT) [1 + (a/b)^2 \sin^2(bT) + 2(a/b) \cos(bT) \sin(bT)]^{1/2}$ , 通常  $a$  相对于  $b$  很小时同样有  $\epsilon_T = \exp(-aT)$ 。

### 4 仿真算例与讨论

为了与常规分析保持一致, 这里采用位移频响函数。可以证明, 相应的幅频曲线峰值点的频率

$$\omega_h = \omega \sqrt{1 - \eta^2 - 2\zeta^2 - 2\eta\zeta}^{1/2} \tag{10}$$

式(10)与式(7)略有差异。由半功率点法计算的表观阻尼比  $\zeta_o = |\omega - \omega_h| / (2\omega_h)$ , 它与真实阻尼比的关系也更复杂。可以证明

$$\zeta_o = \left\{ [2\lambda^2 - 2\lambda - \eta(\lambda^2 - 1)]^{1/2} - \eta(\lambda + 1) \right\} / 2\lambda \tag{11}$$

其中

$$\lambda = (1 + 4\zeta_o^2 - 4\zeta_o^2)^{1/2} \tag{12}$$

原则上, 根据半功率点法估计出表观阻尼比  $\zeta_o$ , 就可以利用式(11)和(12)校正出精确的阻尼比。通常  $\eta + \zeta$  都比较小, 利用这个条件, 式(11)和(12)可近似为

$$\zeta_o \approx \zeta - \eta \tag{13}$$

表明必须从表观阻尼中扣除附加的窗阻尼, 才能得到实际阻尼, 当然这个公式的近似程度与  $\eta$  的值有关。

仿真模型采用式(1)的单自由度脉冲响应函数, 脉冲响应按式(2)计算, 然后按照式(4)加窗, 由半功率点法估计出表观阻尼比后, 再按式(3)校正。为了大范围考察校正公式的精度,  $\zeta$  从 0 以 0.001 步长增加到 0.2, 而  $\eta$  分别取 0, 0.000 1, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2 等 7 种情形, 幅频曲线的峰值点和半功率点依据连续频谱概念用牛顿法搜索<sup>[3-5]</sup>。仿真估计结果的相对误差  $\epsilon = |\zeta_o - \zeta| / \zeta$  相对误差与阻尼比  $\zeta$  的关系见图 2。可以看出, 1) 相对误差与  $\eta$  的关系密切。当  $\eta$  过大时, 相对误

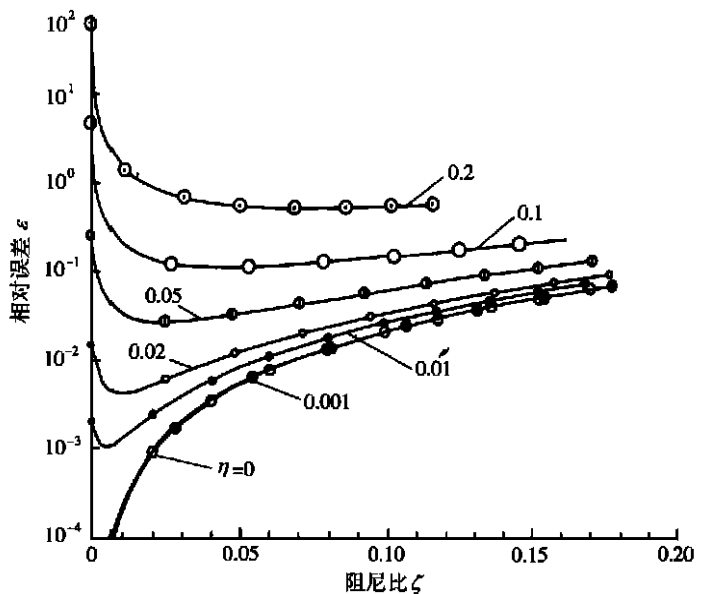


图 2 仿真算例的相对误差  $\epsilon$  与阻尼比  $\zeta$  的关系

差较大,这是因为对于大阻尼系统,半功率点法的精度难以保证。2)  $\zeta$  较小时,相对误差很大,不过在实测中,因噪声、计算误差的影响,准确估计特别小的阻尼很不现实。当  $\zeta$  略有上升之后,相对误差迅速下降,而后再略有增大。3) 当  $a < 0.1$  且  $\zeta < 0.2$  时,相对误差最大为 10%,因而式(13)具有很大的使用范围,因为工程阻尼比一般在 0.001~0.1 之间。

## 5 结束语

加指数窗对采用半功率点法估计阻尼有显著的影响,但对固有频率的识别精度影响不大。本文中导出了阻尼校正公式,对加窗后附加的虚假阻尼进行了修正。仿真结果表明经校正后得到的结果精度较高。该方法具有较广泛的实用性,尤其适用于小阻尼系统。另外加指数窗之后,速度频响函数的矢端仍构成一个标准的圆。

## 参 考 文 献

- 1 许本文,焦群英 机械振动与模态分析基础 北京:机械工业出版社,1998 36~ 38,178~ 200
- 2 Cooper J E. Extending the logarithmic decrement method to analysis two-degree of freedom transient responses *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1996, 10(4): 497~ 500
- 3 陈奎孚,焦群英,高小榕 提高 FFT 谱质量的一种新方法 *振动、测试与诊断*, 1998(3): 216~ 220
- 4 陈奎孚,焦群英,高小榕 周期信号参数的高精度估计 *机械强度*, 1999, 21(3): 174~ 177
- 5 陈奎孚,高小榕 谱峰法的窗函数选择 *中国农业大学学报*, 1997, 2(4): 21~ 27