

拱结构的弹性二次分岔屈曲性能初探

剧锦三

郭彦林

(中国农业大学水利与土木工程学院) (清华大学)

摘要 阐述了拱的非线性屈曲的 2 种形式, 提出了 1 种简捷的计算二次分岔屈曲的方法, 通过算例证实了其可靠性, 最后提出了提高结构承载力和防止发生变形突变的方法。

关键词 极值点屈曲; 二次分岔屈曲; 拱结构

中图分类号 TU 311.41

Primary Exploration of Secondary Bifurcation Buckling Behavior of Elastic Arch

Ju Jinsan

Guo Yanlin

(College of Water Conservancy and Civil Engineering, CAU) (Tsinghua University)

Abstract Two kinds of nonlinear buckling are elaborated, and a kind of compact method of solving secondary bifurcation buckling is brought forward, which is identified credible by a sample. An approach to enhance the load-carry capacity of the arch and to prevent the arch from the sudden change of the deformation is propounded.

Key words limit point buckling; secondary bifurcation buckling; arch

结构的非线性屈曲形式包括极值点屈曲和二次分叉屈曲 2 种。极值点屈曲形式是指, 在荷载作用下, 结构发生与荷载方向一致的变形, 当荷载达到结构承载力的极限时, 结构发生突变, 此时结构的屈曲形式就是极值点屈曲形式。二次分岔屈曲的变形方向与荷载作用方向不同, 这种变形通常是由结构的初始缺陷或者微小扰动引起的^[1]。在加载过程的某一时刻, 由于初始缺陷或微小扰动的影响, 结构变形的方向会从与荷载方向一致的变形形式跳跃到另外一种形式, 从而导致的屈曲形式就是二次分岔屈曲。因为结构的初始缺陷或微小扰动是不可避免的, 所以结构的最终破坏形式就是这 2 种屈曲形式中承载能力小的一种。

拱结构的承重性能很好, 但对初始缺陷和微小扰动非常敏感。图 1 和图 2 分别示出在全跨均布荷载或跨中集中荷载作用下的极值点屈曲和二次分岔屈曲的变形形式。在很多实验中, 由于初始缺陷的影响, 二次分岔屈曲往往是最终的破坏形式, 所以对拱结构二次分岔屈曲的研究有很重要的理论和工程意义。

对二次分岔屈曲的研究前人已经有一些成果^[2,3], 其研究的重点是如何确定分叉点及屈曲后平衡路径的跟踪(见图 3)。Choong 在 1992 年, Dutta 和 White 在 1997 年都成功地跟踪了分叉点前后的平衡路线^[3], 但都是对极值点前后的路线分别做出的, 而不是连续的跟踪全过程。

收稿日期: 2000-09-04

国家自然科学基金资助项目

剧锦三, 北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区)59 信箱, 100083

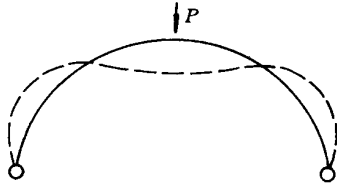


图1 极值点屈曲变形形式

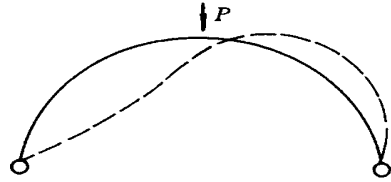


图2 二次分岔屈曲变形形式

Lip H. Teh 在 1999 年提出了一种计算方法, 可以连续跟踪整个屈曲前后的平衡路线, 但是计算方法比较烦琐且未针对二次分岔屈曲这种破坏形式提出工程中实用的措施来防止或控制其不利影响。

笔者针对拱结构二次分岔屈曲的特点, 提出了一种简单易行的方法, 即使用结构措施克服了由初始缺陷或扰动导致的结构承载力降低和变形发生突变的问题, 从而充分发挥了拱结构的特点。

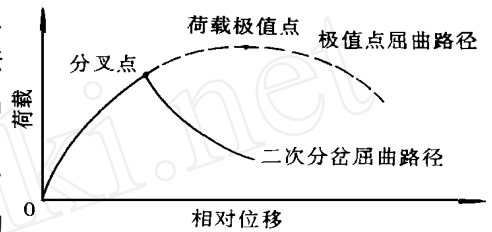


图3 极值点屈曲和二次分岔屈曲的平衡路线

1 基本理论和方法

在对二次分岔屈曲的研究中首先需要确定的关键点是如何找到分叉点, 也就是如何判断一个临界点是极值点还是分叉点。一般用如下准则判断:

极值点

$$\det K = 0, \quad z^T Q = 0 \quad (1)$$

分叉点

$$\det K = 0, \quad z^T Q = 0 \quad (2)$$

其中: K 是结构在临界点的刚度阵, z 对应于刚度阵零特征值的特征向量, Q 是荷载向量。这 2 个公式的物理意义是如果临界点的特征模态与荷载的方向一致, 那么荷载在屈曲时会做功; 如果分叉点的特征模态与荷载向量正交, 那么荷载不做功。

式(1)和(2)表示的准则只满足临界点这一时刻, 而对屈曲前与屈曲后的全过程的分析是不实用的。

笔者研究认为, 给结构添加了与第一屈曲模态相似的一个很小的扰动, 即将最容易发生的屈曲模态乘以一个很小的系数(比如万分之一)之后加到结构上, 然后按照一般的弧长法跟踪, 即可得到一个近似的二次分岔屈曲的平衡路线。在此基础上重新计算下一个近似的平衡路径, 通过这样两三次迭代, 就可以得到非常精确的二次分岔屈曲的平衡路径。另外, 对由于初始缺陷或微小扰动的影响所引起的承载力下降问题, 采取了加拉索的方案^[4,5]从而极大地提高了结构的承载能力。

2 算例

结构模型见图 4, 其材料和几何特性如下。

弹性模量 $E = 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, 截面面积 $A = 0.32 \text{ m}^2$, 截面惯性矩 $I = 1 \text{ m}^4$, 弧的半径 $R = 100$

$m, L = 80\text{m}$ 。

此模型的计算结果见图 5。由图 5 可见, 极值点屈曲的极限承载力是 15.15 kN, 二次分岔屈曲的极限承载力是 12.92 kN; 由于二次分岔屈曲的极限承载力较小, 所以结构首先会发生二次分岔屈曲。同时可以看到, 与线性特征值 13.37 kN 相比, 发生二次分岔屈曲时的极限承载力比特征值要小; 而发生极值点屈曲时的极限承载力比线性特征值要大。这也说明线性屈曲计算的特征值可以在一定程度上反映结构发生变形跳跃时荷载的大小, 但是要准确确定结构在加载过程中的非线性特性还必须进行非线性屈曲的计算。

从图 5 的曲线走势还可以看出 2 种屈曲形式的具体变形过程。无初始缺陷的拱发生极值点屈曲, 其变形曲线是对称的(图 1)。而有初始缺陷的拱发生二次分岔屈曲, 其变形是反对称的(图 2)。虽然有初始缺陷的拱在加载的初期其变形也是对称变形, 但是随着荷载的增大, 由于初始缺陷的影响, 使结构变形跳跃到反对称变形, 从而发生二次分岔屈曲破坏, 因此理想的无缺陷的拱在对称荷载作用下是不会发生反对称变形的, 只能有沿荷载方向的变形, 而只有有缺陷的拱才会发生反对称变形。对于实际结构而言, 初始缺陷往往难以避免, 所以通常拱的破坏形式是反对称的。

以上的算例是针对跨中集中荷载作用下矢跨比为 0.25 的二次分岔屈曲和极值点屈曲的研究, 对于全跨均布荷载作用下和具有不同矢跨比的拱同样可以得到类似的结果。

3 提高二次分岔屈曲极限承载力的措施

为了提高拱的承载能力, 可采用拱上加拉索的方案(图 6), 从支座向拱的四分之一和四分之三处伸出拉索, 对拱进行拉接。通过以往的研究成果, 可知索可以有效地控制拱的反对称变形, 所以它可对二次分岔屈曲的变形进行控制^[4]。

拱的截面和材料与本文算例相同, 索的截面面积是 27.47 cm^2 , 弹性模量 E 为 $0.9 \times 10^7\text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$ 对此模

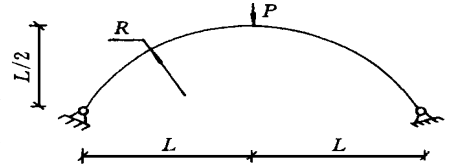


图 4 两端铰接拱

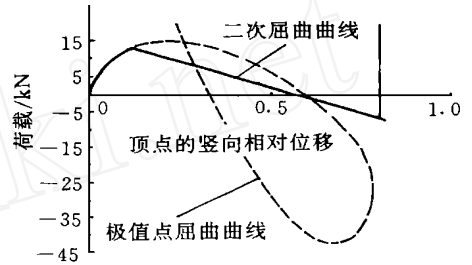


图 5 拱的荷载-位移曲线

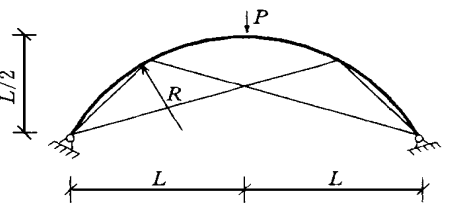


图 6 两端铰接的拉索拱

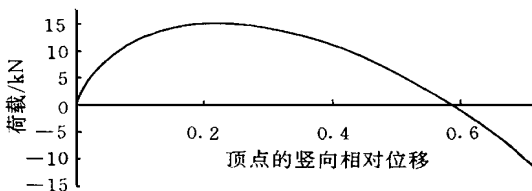


图 7 有拉索拱的荷载-位移曲线

型施加与算例相同的扰动, 然后进行非线性过程跟踪, 所得结果见图 7。对比图 5 和图 7 的曲线可以发现, 图 7 中曲线在极值点前后的路径与图 5 中的极值点屈曲曲线非常相似, 位移与荷载的大小也非常接近, 而与图 5 中的二次分岔屈曲曲线相差甚远, 说明有拉索拱发生了与极值点屈曲极其相似的屈曲

形式。

从图7可知,有拉索的拱虽然也有初始缺陷,但是由于索的作用,其变形形式已经发生了很大的变化,由反对称变形变成了对称变形。这说明虽然索的截面很小,但是对于反对称变形有很好的控制作用,它有效地防止了结构变形的突变。同时有拉索结构的极限承载力是15.08 kN,大于有初始缺陷的无索拱的二次分岔屈曲的极限荷载12.92 kN,而且几乎等于无索拱的极值点屈曲的极限承载力15.15 kN,说明由于索的作用,提高了有缺陷拱的极限承载力。

4 结 论

1) 本文中所使用的计算结构二次分岔屈曲的方法是高效和准确的。

2) 拉索不但可以有效地控制有缺陷拱的二次分岔屈曲变形,使其由反对称变形变成对称变形,而且可以有效地提高有缺陷拱的极限承载力。

参 考 文 献

- 1 剧锦三, 郭彦林. 网壳结构稳定研究的现状及展望. 见: 中国建筑金属结构协会及清华大学编 '98 中国建筑钢结构工程暨学术会议论文集. 北京: 企业出版社, 1998. 40~ 46
- 2 Teng J G, Lou Y F. Analysis of Bifurcation Buckling in Shell of Revolution After Axisymmetric Snap-through. In: LAN T. Proceedings of Asia-Pacific Conference on Shell and Spatial Structures. Beijing: China Civil Engineering Society, 1996. 579~ 586
- 3 Teh L H, Clarke M J. Tracing Secondary Equilibrium Paths of Elastic Framed Structures, Journal of Engineering Mechanics. 1999, 125(12): 1358~ 1364
- 4 Guo Yanlin, Ju Jinsan. Effects of cables on the structure hybridized by I section arch and cables. In: Zhao Xe. Proceedings of The 7th International Symposium on Structural Failure and Plasticity. Melbourne: M PLAST, 2000. 1124~ 1128