中国农业大学学报 2001, 6(2): 21～23
Journal of China Agricultural University

关于 Broyden 方法的一个注记

钟 萍①
(中国农业大学工程基础科学部)

摘 要 在数值分析中Broyden 方法具有一个非常重要的性质, 即用它求解 n 维线性方程组时, 至多 $2n$ 步就能达到精确解。笔者研究了将该方法用于求解线性方程组时的内在性质, 否定了一个自然的推测, 指出它在解线性方程组时不是一个下降的算法, 即所得到的点列与方程组的解之间的距离在任何向量范数意义下都不具有单调下降性。

关键词 Broyden 方法; 线性方程组; 下降算法
中图分类号 O 221.2

A Note on Broyden's Method

Zhong Ping
(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Abstract Broyden's methods are one of the most important methods in numerical analysis. There is an essential nature that the algorithms terminate in at most $2n$ steps on linear problems with n variables. The property of the algorithms on linear problems is studied and the Broyden's methods have been proved that they are not descant. More precisely, the distances between the sequences obtained by solving the linear problems and the solutions of the linear problems do not decrease under any vector norm.

Key words linear equations; Broyden's method; descant algorithms

在求解非线性方程组的迭代算法中,Broyden 方法[1]迭代格式简单, 收敛速度快且数值稳定性好, 因而成为求解非线性方程组应用最广且最有效的方法之一。鉴于它在数值分析上的重要性, 许多学者对它做了更深入的研究。1979 年, Gay 在文献[2]中对Broyden 方法的收敛性做了深刻描述, 他指出Broyden 方法应用于求解 n 维线性方程组时, 至多 $2n$ 步收敛, 即从理论上说, 至多 $2n$ 步即可达到该线性方程组的解。而由于一般的迭代算法(如Newton 法)只能保证收敛到解, 不能保证在有限步内达到解, 所以这个结论被公认为是一个惊人的结论。为了进一步揭示该结论的含义,O'Leary 在 1995 年从残差的角度重新对此给予了证明[3]。从她的证明中, 可以看出Broyden 方法在若干方面的确十分精巧。笔者也曾做过这方面的研究[4]。

众所周知, 和Broyden 方法同属迭代算法类的共轭梯度法具有二次终止性, 这点与Broyden 方法解线性方程组类似, 而共轭梯度法是一个下降算法[5], 人们自然猜想Broyden 方法也应该是一个下降算法, 至少在某种特定的度量下如此。意大利学者 Spedicato 教授就曾明

收稿日期: 2000-06-18
①钟 萍, 北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区) 71 号信箱, 100083

确提出需对此进行认真研究。笔者对用 Broyden 方法求解线性方程组时的内在性质进行了研究,否定了上述猜想。

1 Broyden 方法的迭代格式

考虑求解非线性方程组 $F(x)=0$, $x\in\mathbf{R}^n$ (其中 $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是可微函数)。Broyden 方法首先选取初始迭代点 x_0 和初始非奇异矩阵 H_0 来作为方程组的解和初始点的 Jacobian 逆矩阵的近似。其迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k+s_k,$$
$$H_{k+1}=H_k+(s_k-H_ky_k)v_k^{\mathrm{T}},$$

其中: $s_k=-H_kF(x_k)$, $y_k=F(x_{k+1})-F(x_k)$, $v_k^{\mathrm{T}}y_k=1$。

选取特定的 v_k 可以得到 Broyden 算法类中的不同算法。特别的,当取 v_k 与 s_k 同方向时,即为好的 Broyden 方法[3]。

考虑用 Broyden 方法求解 n 维线性方程组

$$g(x)=Ax-b, \tag{1}$$

其中 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 非奇异, $b\in\mathbf{R}^n$。在 Broyden 方法解非线性方程组的迭代格式基础上,解线性方程组的迭代格式如下

1) 选取初始迭代点 x_0 和初始迭代矩阵 H_0;

2) 计算 $g_k=Ax_k-b$, 如果 $g_k=0$, 则停止;

3) 计算 $s_k=-H_kg_k$, $x_{k+1}=x_k-H_kg_k$, $y_k=g_{k+1}-g_k$;

4) 如果 $y_k=0$, 则令 $H_{k+1}=H_k$, 否则选 v_k 满足 $v_k^{\mathrm{T}}y_k=1$ 且 $v_k^{\mathrm{T}}g_k\neq0$;

5) 修正 H_k 为 $H_{k+1}=H_k+(s_k-H_ky_k)v_k^{\mathrm{T}}$;

6) 令 $k=k+1$, 转 2)。

用 Broyden 方法解式(1)所得到的点列记为

$$\{x_0, x_1, \cdots, x_K\} \tag{2}$$

其中 $1\le K\le 2n$。

2 主要定理

定义 如果存在某种向量范数 $\|\cdot\|$, 使点列式(2)满足对任意的 $k\,(0\le k\le K)$ 都有 $\|x_{k+1}-x^*\|\le\|x_k-x^*\|$, 则称用 Broyden 方法解线性方程组(1)具有单调下降性。

定理 用 Broyden 方法解线性方程组(1)时,不具有单调下降性。

证明 笔者通过构造下面例子来证明此定理。考虑用 Broyden 方法求解

$$g(x)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^{(1)}\\ x^{(2)}\end{bmatrix} \tag{3}$$

取初始点 $x_0=(1,1)^{\mathrm{T}}$, 初始阵 $H_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, 则 $g_0=(3,3)^{\mathrm{T}}$。

第 1 步: 计算 $x_1=x_0-H_0g_0=(-2,-2)^{\mathrm{T}}$, $g_1=(-6,-6)^{\mathrm{T}}$, $s_0=x_1-x_0=(-3,-3)^{\mathrm{T}}$, $y_0=g_1-g_0=(-9,-9)^{\mathrm{T}}$, 取 $v_0=(-1/18,-1/18)^{\mathrm{T}}$, 得到 $H_1=H_0+(s_0-H_0y_0)v_0^{\mathrm{T}}=$

$\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$。

第 2 步: 计算 $x_2 = x_1 - H_1 g_1 = (0, 0)^T$。

在上述例子中, 迭代 2 次就达到了式(3)的解 $x^* = (0, 0)^T$。在迭代过程中, 选取的 v_0 与 s_0 方向相同, 因而是好的Broyden 方法。得到的点列是

$$\left\{x_0 = (1, 1)^T, x_1 = (-2, -2)^T, x_2 = x^* = (0, 0)^T\right\} \tag{4}$$

式(4)中 x_0, x_1, x^* 3 点共线, 且有 $x_1 - x^* = -2(x_0 - x^*)$, 对任意的向量范数, 由其齐次性可知

$$\|x_1 - x^*\| = 2\|x_0 - x^*\|$$

由此可见用Broyden 方法解式(3)不具有单调下降性。定理由此可证。

3　结　论

通过本文中所构造的例子证明了用Broyden 方法解线性方程时, 所得到的点列与解之间的距离在任何范数意义下都不具有单调下降性。

参　考　文　献

1　Broyden C G. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equation. Math Comp, 1965(19): 577～593

2　Gay D M. Some convergence properties of Broyden's method. J Numer Anal, 1979(16): 623～630

3　O'Leary D P. Why Broyden's method terminates on linear equations. J Optim, 1995(6): 231～235

4　钟　萍. 关于用Broyden 方法解线性方程组终止性的讨论. 中国农业大学学报, 1998, 3(6): 24～27

5　袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法. 北京: 科学出版社, 1997. 186～196