

# 非线性跟踪分析中弧长算法的改进

刘学军 李明瑞

(中国农业大学工程基础科学部)

**摘要** 在非线形静力结构变形跟踪技术的研究中, 弧长算法在理论上较明显的优势, 但自身存在一些问题。本文中针对这些问题对以下方面做了改进: 1) 跟踪方向的判定; 2) 荷载增量因数的计算与选择; 3) 弧长调节因数的改进。最后给出算例验证了改进后方法的有效性。

**关键词** 弧长法; 跟踪返回; 有限元

**分类号** O 343.5

## The Improvement of the Arc-length Computation Methods

Liu Xuejun Li Mingrui

(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

**Abstract** Lots of methods were developed in structural nonlinear tracing analysis, and the Arc-length method has been found to have more advantageous among them. But several other problems have arisen due to the features of this method. The main results presented in this paper are: (1) the determination of tracing direction; (2) the calculation and choice of load incremental modulus; (3) the improvement of Arc-length modified modulus. Finally, several examples are given to prove the efficiency of the modified method.

**Key words** Arc-length method; trace back; finite element method

对结构进行变形全过程的非线性跟踪分析, 是全面了解结构受力性能所必须进行的一项复杂工作。荷载控制法和位移控制法是非线性分析中早期常用的方法, 但自身都存在一些缺陷。弧长控制法是目前广泛采用的非线性跟踪算法, 它具有非常明显的优点, 有比较好的跟踪性能, 因而许多学者对这种方法产生了浓厚的兴趣, 他们的研究工作促进了该算法的发展与完善。笔者对该算法进行了研究, 并提出了几点改进方法。

### 1 弧长算法的基本方程

一般的非线性静力结构受力平衡方程可表示为

$$\Phi(x, \lambda) - \lambda p = 0 \quad (1)$$

式中:  $x$  为位移向量;  $\lambda$  为荷载因数;  $p$  为单位外部荷载向量;  $F(x)$  为内部力向量。对式(1)进行一阶泰勒展开

$$\Phi_0(x, \lambda) + [\partial\Phi(x, \lambda)/\partial x]\delta x + [\partial\Phi(x, \lambda)/\partial \lambda]\delta \lambda = 0$$

收稿日期: 1999-10-22

国家自然科学基金资助项目

刘学军, 北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区)214 信箱, 100083

其中  $\partial\Phi(x, \lambda)/\partial x = \partial F(x)/\partial x = K$ , 是  $n \times n$  阶切线刚度矩阵,  $\partial\Phi(x, \lambda)/\partial \lambda = -p$ 。  
 整理后得

$$K_i \delta x = p \delta \lambda + (-\Phi_0(x, \lambda)) \tag{2}$$

设  $\Psi_{res} = -\Phi_0(x, \lambda)$ , 即不平衡力向量, 又取  $K_i \delta x_{nb1} = p$ ,  $K_i \delta x_{nb2} = \Psi_{res}$ ,  $\delta x_{nb1}$ ,  $\delta x_{nb2}$  为不平衡力对应的增量位移向量; 则位移增量方程

$$\delta x = \delta \lambda \delta x_{nb1} + \delta x_{nb2} \tag{3}$$

本文中假设待求位移数为  $N$ , 但方程组(2)的  $N$  个方程中共有  $N + 1$  个未知数, 故此方程组无解, 必须再加一个约束方程才能求解。假设约束方程的形式为

$$C(\delta x, \delta \lambda) = 0 \tag{4}$$

不同的约束方程形成了不同的弧长控制方法。

### 2 弧长算法跟踪方向的判别准则

弧长算法在非线性静力结构问题的路径跟踪程序中应用非常广泛, 通过附加一个约束方程, 就可以应用迭代方法求解收敛点; 但是, 如果迭代方向判断错误, 将导致所谓的跟踪返回现象, 因此迭代方向的判别法对于弧长算法非常重要, 其关键点就是对每一增量步的最初迭代方向的判别。现有的判别准则主要有: 1) 根据当前刚度因数  $S_p$  符号的改变来判别<sup>[1]</sup>; 2) 根据  $S_p$  和对特征值的分析联合判别<sup>[2]</sup>; 3) 根据当前刚度矩阵雅克比行列式符号的改变来判别<sup>[2]</sup>; 4) 根据  $S_p$  和增量功联合判别<sup>[3]</sup>。

已有研究证明判别准则 1) 和 4) 稳定性较差, 2) 则需要有关结构的特征谱分析, 这将加大计算的费用, 除非需要对分岔路径进行跟踪, 否则一般不用。一般来说, 3) 比较有效, 但有时雅克比行列式符号的改变并不一定代表跟踪方向的改变。本文中提出了另一种判别准则。

将  $N$  个位移变量和荷载因数  $\lambda$  看作  $N + 1$  维空间的  $N + 1$  个坐标值, 将结构位移荷载平衡曲线看作  $N + 1$  维空间曲线, 由于结构变形的连续性, 平衡曲线的一阶偏导数连续。

本文中用平面曲线简单描述空间曲线的连续性(图 1)。可以看出, 相邻 2 点 1, 2 处的切线  $a, b$  的夹角为锐角, 即  $ab > 0$ ; 推广到  $N + 1$  维空间后得到

$$(\Delta x^I, \Delta \lambda^I p)^T (\Delta x^{I+1}, \Delta \lambda^{I+1} p) > 0$$

式中:  $(\Delta x^I, \Delta \lambda^I p)$  为第  $I$  次加载收敛后计算所得位移荷载增量值;  $(\Delta x^{I+1}, \Delta \lambda^{I+1} p)$  为第  $I + 1$  次加载时第 1 次迭代所得位移荷载增量值,  $I, I - 1, I + 1$  分别表示第  $I, I - 1, I + 1$  个加载步收敛后, 全文同。

在一定的步长范围内, 如不满足此条件, 则将  $(\Delta x^{I+1}, \Delta \lambda^{I+1} p)$  方向取反, 以使条件得到满足; 若步长过大, 应减小步长后进行判别。对数个算例的分析结果说明, 此判别准则可靠, 且计算量较小, 应用效率较高。

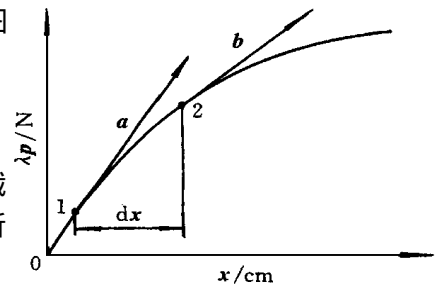


图 1 跟踪方向判别法示意图

### 3 荷载增量因数的计算与根的选择

可将约束方程粗略地分为一次方程和二次方程形式。一般来说, 一次方程表达式和计算都很简单, 但稳定性较差; 二次方程表达式和计算虽然复杂, 但其良好的稳定性是一次方程所无

法比拟的, 因而二次方程在弧长跟踪法中广泛采用。本文中即采用二次方程。将约束方程描述为  $N + 1$  维球面, 以已知平衡点作为空间球心, 所得增量弧长  $l$  为半径列出约束方程

$$(\Delta x^J, \Delta \lambda^J)^T (\Delta x^J, \Delta \lambda^J) = l^2 \quad (5)$$

式中  $J$  表示某加载步第  $J$  次迭代所得增量值。将式(3)代入式(5)简化后得

$$A (\delta \lambda)^2 + B \delta \lambda + C = 0$$

式中:  $A = 1 + (\delta x'_{nb1})^T (\delta x'_{nb1})$ ,  $B = 2 [(\delta x'_{nb2} + \Delta x^{J-1})^T (\delta x'_{nb2}) + \Delta \lambda^{J-1}]$ ,  $C = (\Delta x^{J-1} + \delta x'_{nb2})^T (\Delta x^{J-1} + \delta x'_{nb2}) + (\Delta \lambda^{J-1})^2 - l^2$ 。由此可求得 2 个荷载增量系数  $\delta \lambda_{1,2}$ , 位移荷载更新式为

$$\left. \begin{aligned} \delta x'_{1,2} &= \delta \lambda_{1,2} \delta x_{nb1} + \delta x_{nb2} \\ \Delta x'_{1,2} &= \Delta x^{J-1} + \delta x'_{1,2} \\ \Delta \lambda'_{1,2} &= \Delta \lambda^{J-1} + \delta \lambda_{1,2} \end{aligned} \right\}$$

图 2 示出只有 1 个位移量和荷载因数时的求解及选择荷载增量因数的简单图形解释。荷载位移路径与约束方程所形成的以已知点  $I$  为中心, 以  $l$  为半径的圆相交于 1, 2 两点。由式(5)解出的 2 个根  $\delta \lambda_1$  和  $\delta \lambda_2$ , 即为图 2 中的  $\Delta \lambda_1$  和  $\Delta \lambda_2$ , 相应的位移增量为  $\Delta x_1$  和  $\Delta x_2$ ; 但是, 这 2 个根不都符合弧长法的要求。要使对位移荷载路径的求解能够继续, 必须对根有所选择。当选择  $\delta \lambda_2$  时跟踪继续, 选择  $\delta \lambda_1$  时跟踪则返回原来已求过的路径。

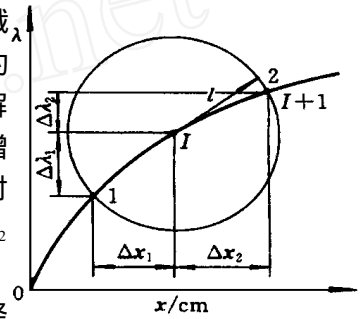


图 2 荷载因数的选择示意图

通常用  $(\Delta x'_{1,2}, \Delta \lambda'_{1,2})^T (\Delta x^{J-1}, \Delta \lambda^{J-1}) > 0$  这一条件来选择

$\delta \lambda$ , 但经计算可知, 有些情况下,  $\delta \lambda_{1,2}$  同时满足此条件, 此时, 该方法就会失效。也有用  $(\Delta x'_{1,2}, \Delta \lambda'_{1,2})^T (\Delta x^{J-1}, \Delta \lambda^{J-1})$  计算, 取值较大者对应的荷载因数作为  $\delta \lambda$ 。这种准则的几何意义比较明显, 即上一次求得的位移荷载增量向量与本次的夹角最小, 否则减小步长重新计算。加此条件后避免了返回现象的出现。

### 4 弧长调节因数

本文中讨论的弧长算法, 又称位移荷载自动跟踪算法, 能自动跟踪、求解且能根据具体情况自动调整弧长。在各种弧长自动调整方法中, 最常用的是<sup>[4]</sup>

$$l^I = (N^* / \sqrt{N^{I-1}})^{1/2} l^{I-1} \quad (6)$$

式中:  $N^*$  为期望收敛所需迭代次数;  $N^{I-1}$  为第  $I-1$  次收敛所用迭代次数。

依据式(6)即可估计出下次所用弧长。虽然用式(6)能基本使弧长随位移荷载曲线的变化而变化, 但仍不够理想, 于是引入另一调整因数

$$q = q^I / q^{I-1} \quad (7)$$

其中

$$q^I = \arccos \left[ \frac{ab}{|a| \cdot |b|} \right]$$

$a$  为第  $I$  次加载收敛后所得增量值,  $a = (\Delta x^I, \Delta \lambda^I)$ ;  $b$  为第  $I-1$  次加载收敛后所得增量值,  $b = (\Delta x^{I-1}, \Delta \lambda^{I-1})$ 。

$N + 1$  维空间曲线的真实曲率能够反映曲线的变化情况, 但空间曲线曲率的计算非常困难, 故改用式(7)来近似表示 2 次曲率的变化情况。  $q < 1$  表示  $N + 1$  维空间曲线变化趋于平缓,

$q > 1$  则表示变化加剧; 所以, 本文中最终弧长调节方程为

$$l' = q^{-1} (N^* / N^{l-1})^{1/2} l'^{-1}$$

从算例分析中可看出  $q$  的加速性能。

### 5 算例分析

弧长算法成功地应用于二维、三维杆件结构及二维拱形结构和三维壳形结构, 尤其在跳跃与跳回处, 跟踪能力极强, 本文中举出 2 例以证明此算法的有效性。

**例 1** 以由同一种圆形杆件组成的空间结构为例, 此结构为空间圆壳型结构的一种近似。有关参数:  $EA = 2.0 \times 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $p = 1 \text{ kN}$ 。  $E$  为材料的弹性模量,  $A$  为圆杆横截面积。

按文献[5]中算例, 在保证每根杆件本身不发生屈曲的前提下讨论结构整体的屈曲行为。将结构整体分为 3 层(图 3), 第 1 层为 1 点; 第 2 层为 2~ 7 点; 第 3 层为 8~ 19 点。其中第 3 层的 12 个点的 3 个自由度被约束掉, 相当于这 12 个点被固定住。在 1 点处加一个竖向的荷载  $p$ , 通过荷载因数  $\lambda$  与位移的关系(图 4)来研究结构的变形过程。

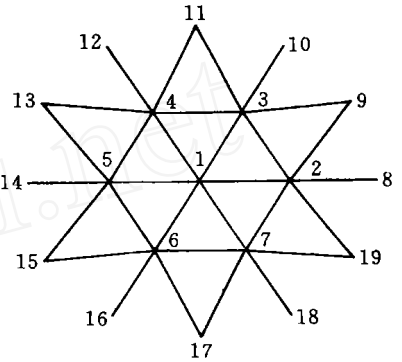


图 3 结构平面示意图

本算例采用球面弧长法进行跟踪, 所用判别标准为笔

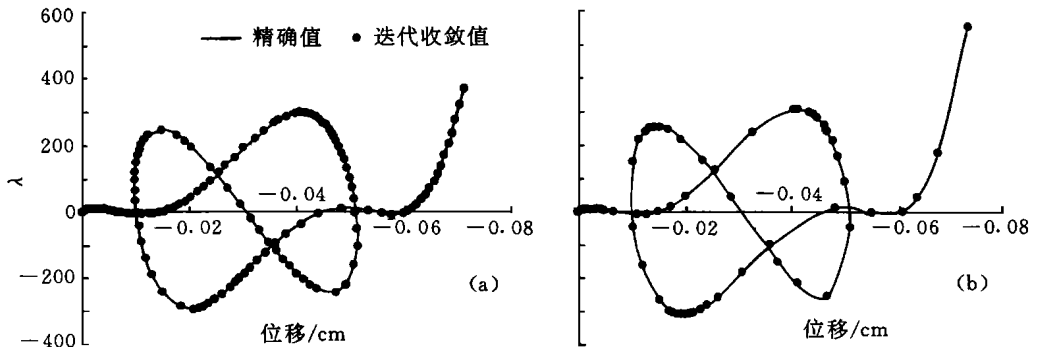


图 4 1 点竖向位移与荷载因数  $\lambda$  的关系

者提出的改进后的判别准则, 迭代时采用完全牛顿方法。从图 4 可以看出, 迭代收敛值与精确值完全一致, 没有出现跳回现象, 且此结构越过了 8 次荷载极限点和 2 次位移极限点。图 4(a) 为未采用加速因数  $q$  的计算结果, 共用 205 个加载步; 图 4(b) 为采用  $q$  的计算结果, 共用 130 个加载步, 加速性能较为显著。

**例 2** 空间壳型结构。支撑和加载形式为: 有对边固支, 边长  $l$ ; 另 2 对边为自由边, 边长  $l$ ; 在此结构中心作用一竖向荷载  $P$ 。由于结构本身及荷载的对称性, 仅取结构的四分之一进行计算。参数  $R = 2540 \text{ mm}$ ,  $l = l = 508 \text{ mm}$ ,  $d = 6.35 \text{ mm}$ ,  $P = 100 \text{ N}$ , 杨氏模量  $E = 200 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ , 泊松比  $\mu = 0.3$ 。计算所得结构中点竖向位移与荷载因数的关系见图 6。

可以明显地看出, 变形过程中出现了一次荷载极限点, 一次位移折返点和一次荷载极限

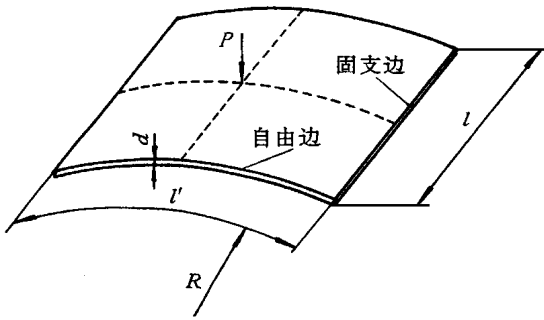
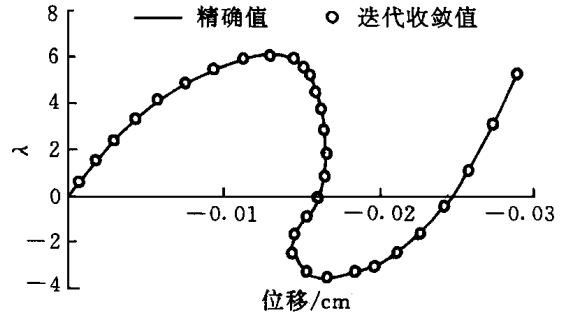


图 5 结构三维透视图

图 6 结构中点竖向位移与荷载因数  $\lambda$  的关系

点, 之后结构再次进入稳定状态的过程。

## 6 结 论

1) 本文中强调了跟踪方向的判别, 因为所计算的路径本身不具有方向性, 只有通过人为的方法才能使计算朝某一方向进行。在这里引入了连续性的思想, 从而将跟踪方向的判别法则自然引出。

2) 用空间  $N + 1$  维的球面描述弧长算法更接近于实用, 且与采用其他二次方程形式的方法相比较计算量增加不大。

3) 算例分析结果表明, 应用完全牛顿-拉夫森算法进行迭代计算更具优势, 可用较少的迭代步完成每次加载, 最终结果使每个加载步长相对较大, 从而可用较少的加载步来完成跟踪过程。结果表明, 同样的路径长度下, 采用完全牛顿-拉夫森算法比其他方法所用机时较少。

4) 本文中并没有考虑路径分叉的情况, 可作为今后的一个方向来研究。

## 参 考 文 献

- 1 Bergan P G, Horrignoe G, Krakeland B, et al Solution techniques for nonlinear finite element problems Int J Num Meth Engng, 1978, 12: 1677~ 1696
- 2 Feng Y T, Peric D, Owen D R J. A new criterion for detemination of initial loading parameter in arc-length methods Comput Struct, 1996, 58(3): 479~ 485
- 3 Bathe K J, Dvorkin E N. On the automatic solution of nonlinear finite element equations Comput Struct, 1983, 17: 871~ 879
- 4 Bellini P X, Chulya A. An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations Comput Struct, 1987, 26: 99~ 110
- 5 李明瑞 非线性几何问题解曲线的全程追踪算法 北京农业工程大学学报, 1992, 12(2): 1~ 8