中国农业大学学报　1999,4(6):25～28
Journal of China Agricultural University

双层二次多目标规划解的最优性条件

甄　苓[①]　王来生
（中国农业大学基础科学部）

摘　要　双层规划能有效地描述具有递阶层次结构的决策系统。本文给出了一类双层多目标规划模型及这类模型解的定义，给出了解的最优性条件。

关键词　双层二次多目标规划；Pareto 有效解；最优性条件
分类号　O 221.2

Optimal Conditions of Bilevel Quadratic Multiobjective Programming

Zhen Ling　Wang Laisheng
(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Abstract　Bilevel programming models can be used efficiently to describe the hierarchy decision system. A class of bilevel quadratic multiobjective programming models is introduced. The definition of solution and the optimality conditions of the solution are given.

Key words　bilevel quadratic multiobjective programming; Pareto efficient solution; optimality conditions

在纷繁复杂的现实问题中，有一类存在着层次关系。近年来处理这类问题比较有效的方法就是双层规划。在双层规划问题中，对于上层决策者的决策，下层决策者要相应给予反应。反应的形式通常有 2 种：一种是下层以自己的最优解反应给上层；另一种是下层以最优值的形式反应给上层。前者反应形式会出现针对上层某一个决策，下层的反应不唯一的情况，这样就使问题复杂化。对于后者反应形式针对上层某一个决策，下层反应是唯一的。李智慧等人就是对后一种反应形式的二次双层规划问题的几何特性与最优性条件进行研究的。本文针对后一种反应形式对双层二次多目标规划问题的有关问题加以讨论。

1　模型与解的定义

本文所讨论的决策系统中有 2 个决策者即上层的领导和下层的随从。其中上层的目标函数是多目标，下层的目标函数为单目标。建立如下的数学模型：

$$\text{(BQML)}\quad \max F(x,y)=\{[f_1(x,y)=\alpha_1^{\mathrm{T}}x+\beta_1\theta(x)],[f_2(x,y)=\alpha_2^{\mathrm{T}}x+\beta_2\theta(x)]\}$$

$$x\in X=\{x\in R^N\mid Ax=b,x\geqslant 0\}$$

其中 $\theta(x)$ 为如下问题的最优值：

$$(P(x))\qquad \theta(x)=\max f(x,y)=y^{\mathrm{T}}Q_1y+(d+2Q_2x)^{\mathrm{T}}y$$

收稿日期：1999-07-06

①甄　苓，北京清华东路 17 号 中国农业大学（东校区）71 信箱，100083

$$y\in Y(x)=\{y\in R^n \mid A_1x+By=b_1, y\geqslant 0\}$$

其中：$x\in R^N$ 为上层决策者的决策变量；$y\in R^n$ 为下层决策者的决策变量；Q_1 为半负定的 n 阶矩阵；Q_2 为 $n\times N$ 矩阵；$A\in R^{M\times N}$，$A_1\in R^{m\times N}$，$B\in R^{m\times n}$，$b\in R^M$，$b_1\in R^m$，$d\in R^n$，$\alpha_1\in R^N$，$\alpha_2\in R^N$，$\beta_1\in R$，$\beta_2\in R$。

定义 1 记 $S=\{(x,y)\mid x\in R^N, y\in R^n; Ax=b, x\geqslant 0; A_1x+By=b_1, y\geqslant 0\}$，称 S 为(BQML)的约束集。

定义 2 记$\oplus(x)=\arg\max\{y^TQ_1y+(d+2Q_2x)^Ty\}\quad y\in Y(x)$，称$\oplus(x)$为(BQML)的下层对应于上层的决策 x 的最优解集。

定义 3 记 $S^*=\{x\in R^N \mid Ax=b, x\geqslant 0, \oplus(x)\neq\phi\}$，称 S^* 为(BQML)的上层可行集。

定义 4 记 $\tilde{S}=\{(x,y)\mid x\in S^*, y\in\oplus(x)\}$，称 $\tilde{S}$ 为(BQML)的可行集。

定义 5 如果$(\bar{x},\bar{y})$满足

1)$(\bar{x},\bar{y})\in\tilde{S}$，

2)不存在$(x,y)\in\tilde{S}$，使 $f_i(x,y)\geqslant f_i(\bar{x},\bar{y})$，$i=1,2$，且其中至少有一个不等式严格成立，则称$(\bar{x},\bar{y})$为(BQML)的 Pareto 有效解。

2 双层二次多目标规划问题解的最优性条件

对于(BQML)，首先讨论可行解的存在条件。

定理 1 设$(x,y)\in S$，则$(x,y)\in\tilde{S}$ 的充分必要条件是存在 $W\in R^m$，使下列式子成立：

$$W^TB=(d+2Q_2x+2Q_1y)^T \tag{1}$$

$$W^T(A_1x+By-b_1)=0 \tag{2}$$

证明

充分性。设$(x,y)\in S$，且满足式(1)和(2)。由于对于确定的 x，相应的下层问题 $P(x)$的目标函数、约束函数均为凸函数，因此 $P(x)$为一个凸规划问题。利用凸规划 K－T 充要条件，y 是 $P(x)$的最优解，所以$(x,y)\in\tilde{S}$。

必要性。利用凸规划 K－T 充要条件可以相应的得到证明。

定理 2 (x^*,y^*)是(BQML)有效解的充要条件为，存在 $w\in R^m$，使(x^*,y^*)是下列问题(ML)的有效解：

(ML) $\quad\max F(x,y)=\{[f_1(x,y)=\alpha_1^Tx+\beta_1\theta(x)],[f_2(x,y)=\alpha_2^Tx+\beta_2\theta(x)]\}$

$$Ax=b, x\geqslant 0 \tag{3}$$

$$A_1x+By-b_1=0, y\geqslant 0 \tag{4}$$

$$w^TB=(d+2Q_2x+2Q_1y)^T \tag{5}$$

$$w^T(A_1x+By-b_1)=0 \tag{6}$$

证明

充分性。设存在 $w^*\in R^m$，使(x^*,y^*,w^*)是(ML)的 Pareto 有效解，则(x^*,y^*,w^*)满足式(3)～(6)。这说明$(x^*,y^*)\in\tilde{S}$，且不存在其他的$(\tilde{x},\tilde{y})\in\tilde{S}$，使 $F(\tilde{x},\tilde{y})\geqslant F(x^*,y^*)$，由定义

5 得知,(x^*,y^*)是(BQML)的 Pareto 有效解。

必要性。设(x^*,y^*)是(BQML)的 Pareto 有效解,则$(x^*,y^*)\in\tilde{S}$。由定理 1 得,存在$w^*\in R^m$,使(x^*,y^*,w^*)满足式(3)～(6),且不存在$(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{w})$,使$F(\tilde{x},\tilde{y})\geqslant F(x^*,y^*)$;因此$(x^*,y^*,w^*)$是(ML)的 Pareto 有效解。

定理 3　如果$\bar{x}\in X$为如下问题的 Pareto 有效解:

(UML)
$$\max_{x\in X} F(x,y)=\{f_1(x,y),f_2(x,y)\}$$

则对于任何$\bar{y}\in\arg\theta(\bar{x})$,$(\bar{x},\bar{y})$是(BQML)的 Pareto 有效解。其中,$f_1(x,y)=\alpha_1^{\mathrm{T}}x+\beta_1\theta(x)$,$f_2(x,y)=\alpha_2^{\mathrm{T}}x+\beta_2\theta(x)$。

证明　设$\bar{x}\in X$是(UML)的 Pareto 有效解,对于$\bar{y}\in\arg\theta(\bar{x})$,则$(\bar{x},\bar{y})\in\tilde{S}$,且不存在$\hat{x}\in X$,$\hat{y}\in\arg\theta(\hat{x})$,使$F(\hat{x},\hat{y})\geqslant F(\bar{x},\bar{y})$;因此$(\bar{x},\bar{y})$为(BQML)的 Pareto 有效解。

定理 4　设$\bar{x}\in X$,$\bar{y}\in Y(\bar{x})$,则$(\bar{x},\bar{y})$为(BQML)Pareto 有效解的充要条件是$(\bar{x},\bar{y})$为如下问题的 Pareto 有效解:

$(\mathrm{ML})_1$
$$\max_{(x,y)\in\tilde{S}} F'(x,y)=(f_1'(x,y),f_2'(x,y))$$

其中:$f_1'(x,y)=\alpha_1^{\mathrm{T}}x+\beta_1[y^{\mathrm{T}}Q_1y+(d+2Q_2x)^{\mathrm{T}}y]$

$f_2'(x,y)=\alpha_2^{\mathrm{T}}x+\beta_2[y^{\mathrm{T}}Q_1y+(d+2Q_2x)^{\mathrm{T}}y]$

证明

充分性。设$(\bar{x},\bar{y})$是$(\mathrm{ML})_1$的 Pareto 有效解,则$(\bar{x},\bar{y})\in\tilde{S}$,且不存在$(\hat{x},\hat{y})\in\tilde{S}$,使$F'(\hat{x},\hat{y})\geqslant F'(\bar{x},\bar{y})$。对于(BQML),$F(x,y)=F'(x,y)$,因此$(\bar{x},\bar{y})$是(BQML)的 Pareto 有效解。

必要性。设$(\bar{x},\bar{y})$是(BQML)的 Pareto 有效解,则$(\bar{x},\bar{y})\in\tilde{S}$且不存在$(\hat{x},\hat{y})$,使$F(\hat{x},\hat{y})\geqslant F(\bar{x},\bar{y})$;而在$(\mathrm{ML})_1$中,$F'(x,y)=F(x,y)$:因此$(\bar{x},\bar{y})$是$(\mathrm{ML})_1$的 Pareto 有效解。

在(BQML)中,上层决策者的目标函数含有下层决策者反馈的信息。如果能够把这一反馈信息确定出来,那么问题就容易求解。

定理 5　设B是行满秩矩阵,如果$\bar{x}$是如下问题$(\mathrm{ML})_2$的 Pareto 有效解,则$(\bar{x},\bar{y})$是(BQML)的 Pareto 有效解:

$(\mathrm{ML})_2$
$$\max_{x\in S^*}\{\bar{f}_1(x),\bar{f}_2(x)\}$$

其中:$\bar{f}_1(x)=\alpha_1^{\mathrm{T}}x+\beta_1\{[(B_1^{-1}(b_1-A_1x))^{\mathrm{T}}\bar{Q}_1(B_1^{-1}(b_1-A_1x))]+[(\bar{d}_1+2\bar{Q}_2x)^{\mathrm{T}}(B_1^{-1}(b_1-A_1x))]\}$

$\bar{f}_2(x)=\alpha_2^{\mathrm{T}}x+\beta_2\{[(B_1^{-1}(b_1-A_1x))^{\mathrm{T}}\bar{Q}_1(B_1^{-1}(b_1-A_1x))]+[(\bar{d}_1+2\bar{Q}_2x)^{\mathrm{T}}(B_1^{-1}(b_1-A_1x))]\}$

B_1是由B的m个线性无关的列向量组成的基矩阵,$\bar{Q}_1$,$\bar{Q}_2$,$\bar{d}_1$为Q_1,Q_2,d_1中对应于基矩阵B_1的由m列组成的矩阵和由m个分量组成的列向量:$\bar{y}=B_1^{-1}(b_1-A\bar{x})$。

证明　由于B_1是由B的m个线性无关的列向量组成的非奇异矩阵,所以对于$(\mathrm{ML})_2$的解$\bar{x}$,$\bar{y}=B_1^{-1}(b_1-A\bar{x})$是下层问题$P(\bar{x})$的最优解;因此

$$\theta(\bar{x})=(B_1^{-1}(b_1-A_1x))^{\mathrm{T}}\bar{Q}_1(B_1^{-1}(b_1-A_1x))+(\bar{d}_1+2\bar{Q}_2x)^{\mathrm{T}}(B_1^{-1}(b_1-A_1x))$$

其中:$\bar{Q}_1$,$\bar{Q}_2$是由Q_1,Q_2中对应于基矩阵B_1的由m列组成的矩阵;$\bar{d}_1$是d对应于基矩阵B_1

的分向量。由于 $\bar{x}$ 是$(ML)_2$的解，不存在 $\hat{x}$，使

$$f_1(\hat{x}) \geqslant f_1(\bar{x}), f_2(\hat{x}) \geqslant f_2(\bar{x})$$

且至少有一个不等式成立；因此对于(BQML)，不存在$(\hat{x},\hat{y})$，使 $F(\hat{x},\hat{y}) \geqslant F(\bar{x},\bar{y})$：所以$(\bar{x},\bar{y})$为(BQML)的 Pareto 有效解。

3　结束语

讨论了双层二次多目标规划解的最优性条件，在此基础上可以进一步给出求解的方法。关于这方面的内容笔者将另文给出。

参考文献

1　王　谦，汪寿阳．线性二次双层规划问题．系统工程理论与实践，1994，14(4)：1～8

2　李智慧，滕春贤，李　磊，等．二次双级规划的几何特性与最优性条件．系统工程理论与实践，1999，19(1)：23～26

3　王先甲，冯尚友著．二层系统最优化理论．北京：科学出版社，1995

4　盛昭瀚著．主从递阶决策论——Stackelberg 问题．北京：科学出版社，1998