

2 真实齿面对应点的求解算法

孙殿柱^①

董学朱^②

(山东工程学院) (中国农业大学机械工程学院)

摘 要 针对真实齿面数学模型为自由型参数化隐式递推公式,不易于用一般方法进行迭代求解的问题,提出了将求 2 齿面对应点问题转换成求直线与齿面交点的三角形判断法,并进一步提出运用三角形减半法确定真实齿面精确对应点的迭代初值,得到了一种稳定、可靠、精度高且运算速度较快的求解算法。

关键词 真实齿面; 三角形判断法; 三角形减半法; 对应点求解算法

分类号 TH 132.413

Solving Algorithms of Corresponding Point of Two Real Tooth Surface

Sun Dianzhu

Dong Xuezhu

(Shandong Institute of Technology) (College of Machinery Engineering, CAU)

Abstract The mathematical model of real tooth surface, which is recursion formula of free form parameterization, can't iterate with general method. The algorithm of triangle judgement inverting the corresponding point of two tooth surfaces to the intersect of straight-line on surface is suggested. The algorithm of triangle reducing part giving the iterating initial value of the accurate corresponding point on real tooth surface is put forward to achieve a stable, reliable, precise and efficient method.

Key words real tooth surface; algorithm of triangle judgement; algorithm of triangle reducing part; solving algorithm of corresponding point

在用零间隙法^[1]求解真实齿面瞬时啮合点的过程中,所遇到的情况多为 2 齿面相交或相离。为找到瞬时啮合点,要不断地对大轮转角或小轮转角进行调整,并对大轮齿面实施网格细化,通过计算 2 齿面对应点的间隙,不断判别 2 齿面是否相交或相离。当调整到 2 轮齿面相切,或在精度允许范围内接近相切时,再把接近相切的点作为初始点,通过迭代求解精确的啮合点。求解 2 齿面在网格节点处的间隙时,首先要求出大轮齿面在网格节点处沿作为基准点的 M 处齿面法线方向的直线与相啮合小轮齿面交点的坐标值,之后计算该节点的间隙。由于描述真实齿面的数学模型为自由型参数化隐式递推公式,难于用一般的曲面求交算法实现^[2~4],必须寻求新的求解算法。由于齿面的 NURBS 插值曲面权因子均大于零,故插值形成的曲面恒位于它的控制顶点的凸包内。利用这一特点,笔者将求 2 齿面对应点问题转换成直线与齿面的求交点问题,并提出了三角形判断法及三角形减半法。

收稿日期:1999-01-13

①孙殿柱,山东省淄博市 山东工程学院,255012

②董学朱,北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区)52 信箱,100083

1 由大轮网格点查找小轮齿面对应点

设按照曲面的正算算法已求得大轮齿面上一点,现要在大轮齿面上同一活动标架 σ_M 中查找小轮齿面上对应点的径矢 $p(x_0, y_0, z)$ 。表示大、小轮齿面的 NURBS 曲面是双参数曲面,可将其表示为^[1]

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x(u_i, v_i) \\ y_i &= y(u_i, v_i) \\ z_i &= z(u_i, v_i) \end{aligned} \right\} \quad i=1, 2$$

这里所研究的问题实质上是求解由大轮齿面上径矢为 $p(x_0, y_0, z_0)$ 的任意一点所作与 z 轴(即法线方向)平行的直线与小轮齿面的对应交点。在交点处

$$\begin{cases} x(u_1, v_1) - x_0 = 0 \\ y(u_1, v_1) - y_0 = 0 \end{cases}$$

化简为

$$\begin{cases} f(u_1, v_1) = 0 \\ g(u_1, v_1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

将式(1)用牛顿迭代法求解:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(u_0, v_0) \\ g(u_0, v_0) \end{bmatrix}$$

解出 (u_1, v_1) 后,亦即确定了大轮齿面上某一网格点沿该点 z 轴方向的直线与小轮齿面的交点。现在的关键问题是如何选择初值 (u_0, v_0) 使得迭代收敛到交点。由于齿面的 NURBS 插值曲面权因子均大于零,故其仍具有凸包性质,即插值形成的曲面恒位于它的控制顶点的凸包内。利用这一性质,通过直线和小轮齿面控制多边形求交点。首先判断直线与曲面是否可能有交点,然后进一步判断交点在哪一曲面片内,再由三角形减半法找出小轮齿面上与大轮齿面上离散点 (x_0, y_0) 相对应的坐标相近的一点 (x_1, y_1) , 将其作为初始点,以备迭代与大轮齿面上相对应的精确点。

2 由3个角度之和判断交点所处三角形及相应的曲面片

由于曲面控制顶点在拓扑上呈矩形阵列(图1),其网格均由四边形组成。各四边形4个顶点不一定在同一平面之内,须将每个四边形按同一方向划分为2个三角形加以判断。又本问题中直线为 z 轴方向,仅需将直线与三角形投影到 xOy 平面内(这时直线变为一个点),判断交点是否在三角形内,在哪个三角形内。

图2示出笔者提出的一种判断交点是否在三角形内的有效算法。当 $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$ 时(图2(a)),交点一定在三角形之外;当 $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ 时(图2(b), (c)),交点一

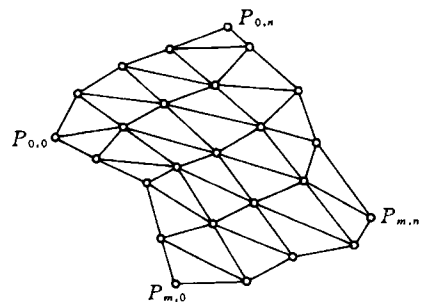


图1 齿面控制多边形网格

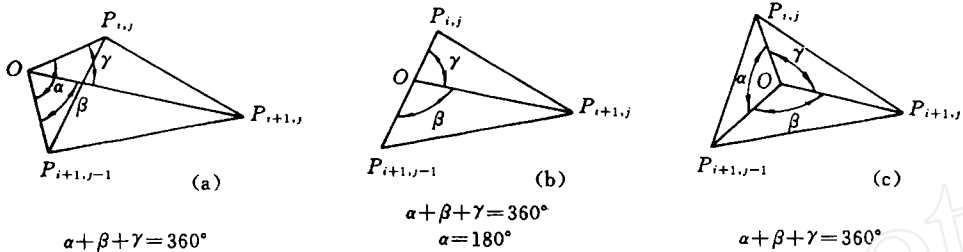


图2 判断交点是否在三角形内

定在三角形之内或之上。当确定交点在某个三角形之内后,再由真实齿面上 B 样条曲线的局部性质和定义域确定交点所在的曲面片。

局部性质^[1]表明,在曲线定义域内,定义在非零节点区间 $u \in [u_i, u_{i+1}]$ 上那一 k 次 B 样条曲线段,由 $k+1$ 个控制顶点的径矢 $d_{i-k}, d_{i-k+1}, \dots, d_i$ 及相应的 B 样条基函数决定,与其他顶点无关。于是,往下标减小方向错过 1 个顶点,即其径矢为 $d_{i-k-1}, d_{i-k}, \dots, d_{i-1}$,那么 $k+1$ 个顶点就定义了上一曲线段。往下标增大方向错过 1 个顶点,即其径矢为 $d_{i-k+1}, d_{i-k+2}, \dots, d_{i+1}$,那么 $k+1$ 个顶点就定义了下一曲线段。它们的定义区间分别是上一个与下一个节点区间,即 $[u_{i-1}, u_i]$ 与 $[u_{i+1}, u_{i+2}]$,即定义在 $[u_i, u_{i+1}]$ 上的 k 次 B 样条曲线与 $k+1$ 个顶点有关($k=3$)。将这一 B 样条曲线的局部性质推广到 NUBRS 曲面,可确定与之相对应的曲面片,以及曲面片角点的有关参数,亦即完全确定了直线与哪一曲面片有交。

3 由三角形减半法确定迭代初始点

当交点所在的曲面片确定之后,即可相应地确定交点所在的三角形曲面片,以及 3 个角点的相关参数(u_1, v_1)和 3 个角点的径矢 $p_1(u_1, v_1)$, $p_2(u_1, v_1)$ 和 $p_3(u_1, v_1)$,然后将三角形曲面片投影到 xOy 平面内(图 3)。由三角形减半法确定迭代初始点的过程如下:

交点坐标为 x_0, y_0 ,三角形角点之一的坐标为 x_1, y_1 。由 $r = [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]^{1/2}$ 式计算三角形 3 个角点到交点的距离,根据距离大小将 3 角点按 1, 2, 3 排序,从 2 点引直线交于 1, 3 点连线的中点,把该三角形分成 2 个三角形。去掉无交点的三角形,将交点所在三角形按上述过程继续减半计算处理,直至三角形角点之一到交点的距离小于 10^{-1} mm,将该点的值作为求精确对应点的初始点。

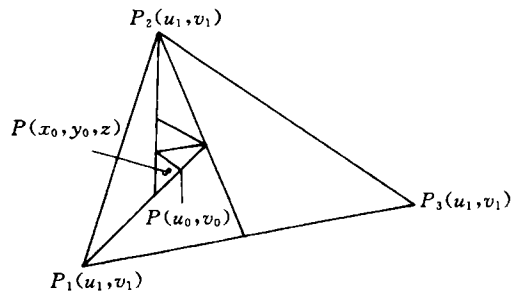


图3 用三角形减半法确定初始点

4 2 真实齿面求解对应点算法的实现步骤

为根据本文中提出的算法,实现 2 真实齿面对应点的求解,编制了计算机程序,其计算步骤如下。

- 1) 输入大轮齿面上一点的径矢 $p(x_0, y_0, z_0)$ 。
- 2) 调用函数 Search Box Include P 来判断 $p(x_0, y_0, z_0)$ 的 z 轴方向对应点是否在小轮齿面

上;如不在,则返回无对应点信息;如存在,则继续3)以下步骤。

3)调用函数 Cal_Angle 判断 $z=z_0$ 线具体穿过小轮齿面的哪一个控制网格。

4)根据3)中决定的控制网格,调用函数 GetUV 查找初始点所在的小轮齿面上的具体曲面片。

5)调用函数 Angle_Red,利用三角形减半算法确定迭代初始点的坐标 (x_1, y_1) 。

6)调用函数 Init_Value 计算坐标 (x_1, y_1) 的 (u_0, v_0) 值。

7)以 (u_0, v_0) 值为初始点,调用函数 Newton 进行迭代查找对应点,每进行一步迭代得到一组 (u_1, v_1) 值。

8)若迭代到 (u_1, v_1) 值满足精度要求,则返回对应点,退出。

5 齿面瞬时啮合点的计算

在使用零间隙法求解真实齿面上瞬时啮合点的过程中,以本文中提出的2 真实齿面对应点求解算法为核心,所得渐开线标准螺旋圆柱齿轮小轮齿面上瞬时啮合点的计算值及为考核这种方法的精度,利用文献[5]中理论公式计算的理论值见表1。

表1 渐开线标准螺旋圆柱齿轮小轮齿面瞬时啮合点的计算值和理论值

序号	计 算 值				
	x_1/mm	y_1/mm	z_1/mm	r_1/mm	$ p_1 /\text{mm}$
1	17.450 319	0.907 038	2.134 821	17.473 876	17.603 801
2	17.971 999	0.325 181	0.985 733	17.974 941	18.001 949
3	18.345 146	-0.026 791	0.442 868	18.345 166	18.350 510
4	18.544 306	-0.214 615	0.189 326	18.545 548	18.546 514
5	18.811 014	-0.471 124	-0.124 768	18.816 913	18.817 326
6	19.804 751	-1.518 317	-1.145 675	19.862 866	19.895 880
7	20.560 441	-2.451 812	-1.842 553	20.706 113	20.787 932

序号	理 论 值						
	θ_1/rad	μ_1/rad	x_1/mm	y_1/mm	z_1/mm	r_1/mm	$ p_1 /\text{mm}$
1	-0.112 057	0.052 396	17.450 332	0.907 027	2.134 809	17.473 889	17.603 813
2	-0.267 312	0.024 194	17.971 981	0.325 087	0.985 737	17.974 921	18.001 929
3	-0.340 661	0.010 870	18.345 149	-0.026 794	0.442 864	18.345 169	18.350 512
4	-0.374 918	0.004 647	18.544 302	-0.214 613	0.189 325	18.545 544	18.546 510
5	-0.417 356	-0.003 062	18.811 012	-0.471 126	-0.124 769	18.816 911	18.817 325
6	-0.555 294	-0.028 119	19.804 754	-1.518 315	-1.145 673	19.862 869	19.895 882
7	-0.649 457	-0.045 224	20.560 431	-2.451 804	-1.842 599	20.706 102	20.787 925

表1中: $r_1=[x_1^2+y_1^2]^{1/2}$ 为小轮齿面瞬时啮合点在轴线平面里半径的计算值及与之对应的理论值; $|p_1|=[x_1^2+y_1^2+z_1^2]^{1/2}$ 为小轮齿面瞬时啮合点径矢模的计算值与对应的理论值。可以看出计算精度可达 $10^{-5} \sim 10^{-6}$ mm,完全能够满足工程要求。

6 结 论

1) 将求 2 齿面对应点问题转换成求直线与齿面交点的问题, 并进一步提出了三角形判断法。通过直线和小轮齿面控制多边形求交点, 首先判断直线与控制网格是否可能有交点, 若有交点判断交点在哪一控制网格内, 然后快速、准确地求出交点所在的曲面片。

2) 提出了用三角形减半法找出小轮齿面上与大轮齿面上离散点坐标相近的一点, 将其作为初始点, 迭代到与大轮齿面上相对应的精确点的求解算法。该算法稳定、可靠, 且精度高, 运算速度较快。

参 考 文 献

- 1 孙殿柱. 真实齿面啮合理论的研究:[学位论文]. 北京: 中国农业大学, 1998
- 2 Patrikalakis N M. Surface-to-surface intersections. IEEE Comput Graph & Applic, January 1993. 89~95
- 3 Barnhill R E, Kersey S N. A marching method for parametric surface/surface intersection. CAGD, 1990, 7(1): 257~280
- 4 Kriezis G A, Patrikalakis N M, Wolter F E. Topological and differential-equation methods for surface intersection. CAD, 1992, 24(1): 41~55
- 5 董学朱. 交错轴渐开线斜齿轮的研究. 机械传动, 1993, 17(3): 1~6