

羊毛毡类多孔介质水分吸附与保持机理研究的数学建模

孙宇瑞^① 赵燕东

(中国农业大学精细农业研究中心)

摘 要 根据羊毛毡类多孔材料的结构特点,建立了2种计算毛细管水分吸附高度的数理模型。其中3维正交模型的计算值与实验值吻合较好,模型的计算精度可以满足工程应用的需要。这种建模思想对于分析其他类型多孔介质材料水分吸附与保持问题时也有参考价值。

关键词 多孔介质;毛细现象;羊毛毡;纤维;建模

分类号 O 552.421

Modeling on Determination of Capillary Rise in Fleece

Sun Yurui Zhao Yandong

(Research Centre for Precision Agriculture, CAU)

Abstract Based on the structure properties of fleece, two models about the calculating on the height of capillary rise have been proposed. The model distributing fiber in three orthogonal directions is more fittable to the test result and the need of engineering. It can also distribute to the other researches on capillary rise in porous.

Key words porous; capillary; fleece; fiber; modeling

在现实物质世界中,土壤、海绵体、纸张和纤维纺织制品等都可归属于多孔介质材料的定义范畴。从微观结构上看,这些多孔介质材料一方面表现出各向异性的共同特点,另一方面在材料结构的组织形式上又存在着明显的构造差异。目前对于多孔介质材料的水分吸附与保持机理,普遍采用物理学中的空心毛细管吸水过程来解释。实际上对于不同多孔介质材料的微观结构,完全可以根据该类材料微观结构形式的特点建立与其对应的数学模型。笔者同样应用物理学中的毛细管原理,对羊毛毡类材料水分吸附与保持问题的数学建模进行探讨。

1 多孔介质中毛细现象的一般性描述

所谓毛细现象,即当一根毛细管插入水中时,水便湿润毛细管壁并沿毛细管上升到一定高度^[1]。毛细管的管径越细,相对于液平面液体爬升得越高。毛细管中的水面呈弯月形,凹向空气一边。从物理学上解释液面好比一个弹性橡皮膜,凹向空气一边表明液体内部的大气压强比外部大气压强小。

为了计算水在毛细管中的上升高度,需要引入液体的张力 σ 、液体的密度 ρ 和气-液-固之间的接触角 α 等参数。在图1中, κ 表示液体弯月面的

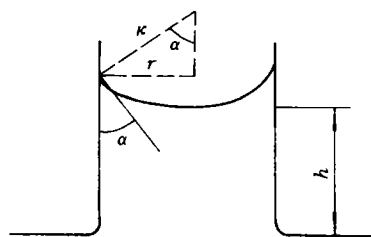


图1 毛细管中水的上升高度与毛细管参数的关系

收稿日期:1999-03-29

①孙宇瑞,北京清华东路17号中国农业大学(东校区)63信箱,100083

曲率, r 表示毛细管的半径。根据液体弯月面附加压强恰与毛细管中水柱压强平衡的关系, 有 $2\kappa\sigma\cos\alpha=\pi\kappa^2h\rho g$, 即

$$h=\frac{2\sigma}{\kappa\rho g}\cos\alpha \quad (1)$$

式(1)中的接触角 α 取决于液体对固体的湿润程度。如果液体的内聚力小于液体与固体间的粘着力, 则液体可以湿润固体。 α 的数值越小, 表明湿润程度越高, 当 $\alpha=0$ 时, 对应于固体完全被液体所湿润。

2 羊毛毡类多孔介质水分吸附与保持的数学建模

在显微镜下对羊毛毡类多孔介质做微观分析不难发现, 材料的主要成分是羊毛。羊毛的几何特征一是长度大大大于直径, 二是它可看作一根实心纤维, 所以我们能够想象当羊毛竖立在水中时它引起的毛细水势是沿纤维外侧出现的。图2示出了单根羊毛纤维竖立在水中的情景。在认为羊毛完全被水浸湿的前提下, 沿着图2中纤维外环 A—A 建立的毛细管细胞张力与引力的平衡方程为

$$\pi D\sigma=V_L\rho g \quad (2)$$

其中

$$V_L=V_s-\frac{\pi D^2h}{4}$$

$$V_s=\int_0^h\pi r^2dz=\pi\int_0^h\left[h+\frac{D}{2}-2(2hz+z^2)^{1/2}\right]^2dz=$$

$$\pi\left[\left(\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}\right)h^3+D\left(1-\frac{\pi}{4}\right)h^2+\frac{D^2h}{4}\right]$$

将积分结果代入式(2), 可得到关于毛细水高度 h 的3次代数方程

$$\rho gh^2\left[\left(\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}\right)h+D\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right]-D\sigma=0 \quad (3)$$

由式(3)解出的由单根纤维引起的毛细水高度是十分微小的。可以进一步想象如果2根或多根纤维并行竖立, 纤维间距离越靠近, 毛细水高度会越大。虽然纤维在3维空间上是随机分布的, 但为了从宏观上研究羊毛毡材料的水分吸附与保持机理和便于构造数学模型, 不妨先假想所有纤维都是竖立的, 见图3。图中 a 为羊毛毡体的长度, b 为宽度, d 为2根纤维间的距离。显然, 纤维的根数 $m\approx ab/d^2$ 。按照图3模型建立类似于式(2)的平衡关系

$$\sum_{i=1}^m\pi d_i\sigma=\rho gV\eta$$

式中: η 为羊毛毡材料的孔隙度; V 为羊毛毡材料的体积。显然 $V=abh$ 。

进一步定义羊毛毡纤维的平均直径

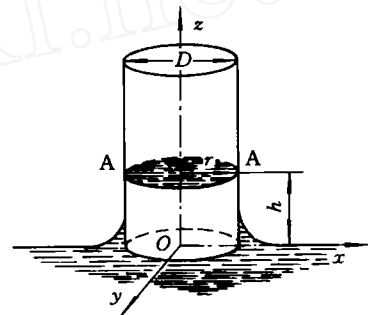


图2 单根纤维竖立在液体中的毛细现象

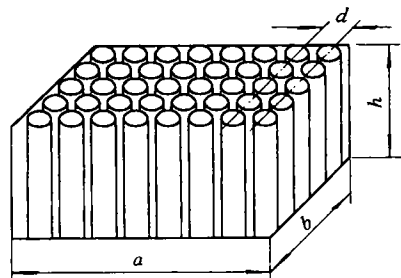


图3 多根纤维同时竖立的物理模型

$$d_F = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m d_i \quad (4)$$

又有 $h = \pi d_F \sigma / \eta \rho g d^2$; 另一方面, 不难推得纤维中心距离 d 、孔隙度 η 与平均直径 d_F 之间有下列关系:

$$d^2 = \frac{\pi d_F^2}{4(1-\eta)} \quad (5)$$

用 d_F^2 取代 d^2 后, 即得到

$$h = \frac{4\sigma\eta}{d_F(1-\eta)\rho g} \quad (6)$$

通过实验发现式(6)的计算结果明显偏高, 经分析认为图3所示模型结构的假设明显不合理, 因为事实上不可能所有的纤维都是竖立的。基于此, 现进一步将纤维假设沿3维方向排放, 即用图4所示的模型结构表示。有

$$d^2 = \frac{3\pi d_F \sigma}{4(1-\eta)} \quad (7)$$

将式(7)代入(4)后得到修正后的计算公式

$$h = \frac{4\sigma\eta}{3d_F(1-\eta)\rho g} \quad (8)$$

又因为孔隙度的定义为 $\eta = (\rho_F - \rho_t) / \rho_F$, 式中 ρ_F 为羊毛纤维的密度, ρ_t 为羊毛毡的密度, 所以式(8)也可表示成

$$h = \frac{4\sigma\rho_t}{3d_F(\rho_F - \rho_t)\rho g}$$

3 数学模型的实验验证

为了确定3维模型的精确性, 现用羊毛毡材料做了验证实验, 结果见图5。可以看出模型计算与实验结果一致性很好。

4 结 论

针对羊毛粘纤维是一种实心纤维的特点, 研究了这类多孔介质水分吸附与保持机理的数学建模。实验结果不仅表明所建模型的计算精度完全可以满足工程应用的需要, 而且这种数学建模的思想对于分析其他类型多孔介质材料水分吸附与保持问题时也具有一定的借鉴价值。

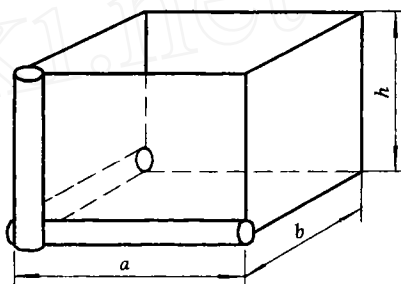


图4 羊毛毡纤维分布3维物理模型示意图

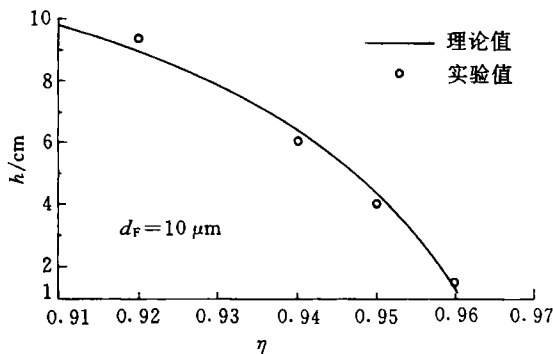


图5 毛细管吸附高度 h 、孔隙度 η 和纤维平均直径 d_F 的关系(理论值与实验值对比)

参 考 文 献

- 1 姚贤良, 程云生, 熊毅. 土壤物理学. 北京: 农业出版社, 1986. 285~287