

重虚圆点四次曲线的构成方法

边 欣^①

(中国农业大学计算机网络中心)

摘 要 重虚圆点四次曲线是很重要的一类高次平面曲线。提出并研究了它的 2 种构成方法——圆锥曲线的反演变换法和类射影对应圆束相交法;给出了类射影对应圆束的定义和 2 种构成法的实例及计算机图形。

关键词 重虚圆点四次曲线;反演变换;类射影对应圆束

分类号 O 185.1

Study on Formation Methods of Bicircular Quartic

Bian Xin

(Computer Network Center, CAU)

Abstract Bicircular quartic is a very important classics of higher plane curves. Two formation methods are studied: the inverse transformation of conics and the intersection of two like-projective pencil of circles. The concept of like-projective pencil of circle is defined. The examples of two formation methods and the graphs drawn by computer are given.

Key words bicircular quartic; inverse transformation; like-projective pencil of circles

重虚圆点四次曲线族中有很多特殊四次曲线,如卡西尼曲线、双纽线等,它们是圆环的截面曲线,在曲面相贯和几何作图等实践中用途很广。根据四次曲线的构成方法能够利用计算机精确地绘制四次曲线,这对计算机高次曲线和曲面造型有重要的意义。

1 重虚圆点四次曲线的方程

三线坐标系(如图 1)下四次曲线的方程^[1]为 $\alpha^4 u_0 + \alpha^3 u_1 + \alpha^2 u_2 + \alpha u_3 + u_4 = 0$ 。其中 u_n 为 β 和 γ 的二元 n 次齐次多项式, $n = 0, 1, \dots, 4$ 。

在无穷远的圆点处具有 1 对结点的四次曲线,即重虚圆点四次曲线。在三线坐标系下,若 O_2, O_3 是四次曲线的 2 个结点,则 β, γ 的 4 次项、3 次项消失,且 2 次项系数等于 0 构成这 2 点的切线方程,其判别式必大于 0;所以在三线坐标系下,以 O_2, O_3 为 1 对结点的四次曲线方程^[1]为

$$\alpha^2(L\alpha + M\beta + N\gamma) + \lambda\beta^2\gamma^2 + \mu\gamma^2\alpha^2 + \nu\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta\gamma(l\alpha + m\beta + n\gamma) = 0 \quad (1)$$

式中: α, β, γ 为三线坐标; $L, M, N, \lambda, \mu, \nu, l, m, n$ 为常数,且 $m^2 > 4\lambda\nu, n^2 > 4\lambda\mu$ 。

假设 O_2, O_3 为无穷远处圆点, O_1 是直角坐标系的原点,则记 $\alpha = I, \beta = x + iy, \gamma = x - iy$,代

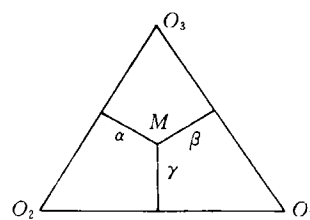


图 1 三线坐标系

收稿日期:1999-03-11

①边 欣,北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区)53 信箱,100083

入式(1)得直角坐标系下的方程

$$I^3[LI + (M+N)x + i(M-N)y] + \lambda(x^2 + y^2)^2 + I^2[(\mu + \nu)(x^2 - y^2) + 2i(\mu - \nu)xy] + I(x^2 + y^2)[LI + (m+n)x + i(m-n)y] = 0 \quad (2)$$

改变常系数用实量代替 $i(M-N)$, $i(\mu - \nu)$, $i(m-n)$, 则式(2)可写成

$$(x^2 + y^2)^2 u_0 + (x^2 + y^2)u_1 + v_2 + v_1 + v_0 = 0 \quad (3)$$

其中 $u_n, v_n (n=0, 1, 2)$ 是 x, y 的二元 n 次齐次多项式。这就是重虚圆点四次曲线的普遍方程。

2 圆锥曲线反演变换法构成重虚圆点四次曲线

圆锥曲线的极坐标方程为 $r^2(a\cos^2\theta + b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta) + r(f\cos\theta + e\sin\theta) + g = 0$ 。设反演极与直角坐标系、极坐标系原点重合, 经过反演变换^[2]得 $k^4 r_1^2(a\cos^2\theta_1 + b\cos\theta_1\sin\theta_1 + c\sin^2\theta_1) + k^2 r_1^2(fr_1\cos\theta_1 + er_1\sin\theta_1) + gr_1^4 = 0$, 式中 k 为反演半径; 再化为直角坐标得

$$g(x_1^2 + y_1^2)^2 + k^2(x_1^2 + y_1^2)(fx_1 + ey_1) + k^4(ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2) = 0 \quad (4)$$

为了书写方便, 以下不再加角标“1”。

从式(4)可以看出, 当 $g \neq 0$ 时, 一般二次曲线经反演变换后为重虚圆点四次曲线; 当 $g = 0$ (即二次曲线经过反演极) 时, 四次曲线退化为三次曲线。一般二次曲线经反演变换后均通过坐标原点, 且坐标原点是一个二重点, 曲线在该点的切线方程由 $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ 给出, 当二次曲线是椭圆、双曲线、抛物线时, 原点将分别是重虚圆点四次曲线的孤点、结点和尖点。

例1 椭圆 $9x^2 + 2y^2 - 18 = 0$, $k = 3/2$, 反演后为四次曲线 $32(x^2 + y^2)^2 - 81x^2 - 18y^2 = 0$, 见图 2(a)。

例2 抛物线 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 2y + 6 = 0$, $k = 3$, 反演后为四次曲线 $2(x^2 + y^2)^2 + 3(x^2 + y^2)(3x + 2y) + 27(x^2 + 4xy + 4y^2) = 0$, 见图 2(b)。

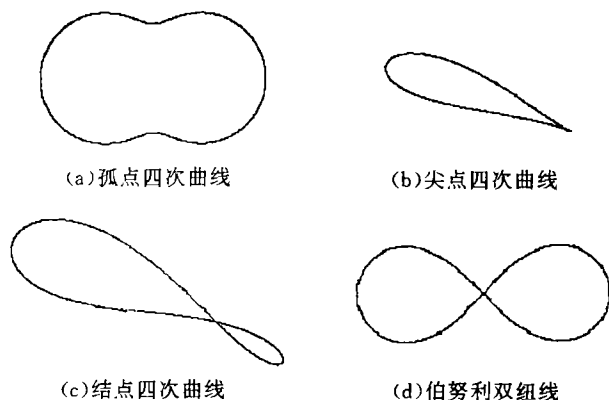


图2 反演变换后各种重虚圆点四次曲线

例3 双曲线 $x^2 + 5xy + 4y^2 + 3x + 2y + 6 = 0$, $k = 3$, 反演后为四次曲线 $2(x^2 + y^2)^2 + 3(x^2 + y^2)(3x + 2y) + 27(x^2 + 5xy + 4y^2) = 0$, 见图 2(c)。

例4 等轴双曲线 $x^2 - y^2 - 16 = 0$, $k = 7/2$, 反演后为伯努利双纽线 $256(x^2 + y^2)^2 - 2401(x^2 - y^2) = 0$, 见图 2(d)。

3 2个类射影对应圆束相交构成重虚圆点四次曲线

类射影对应圆束定义: 2个一次线束 $p + \lambda q = 0$, $p_1 + \lambda_1 q_1 = 0$, 若 $p - p_1, q - q_1$ 互相对应, 则

满足 $\lambda_1 = k\lambda$ (k 为常数) 时, 2 线束成射影对应^[3]。

有 2 圆束

$$f_\lambda = f_1 + \lambda f_2 = 0 \quad (5)$$

$$g_{\lambda 1} = g_1 + \lambda_1 g_2 = 0 \quad (6)$$

$f_1 - g_1, f_2 - g_2$ 互相对应, 则满足 $\lambda_1 = k\lambda$ (k 为常数) 时, 2 圆束为类射影对应。式(5)和(6)中 f_1, f_2, g_1, g_2 均取圆的标准方程式: $f_1 = (x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 - r_1^2 = 0, f_2 = (x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 - r_2^2 = 0; g_1 = (x - \alpha_3)^2 + (y - \beta_3)^2 - r_3^2 = 0, g_2 = (x - \alpha_4)^2 + (y - \beta_4)^2 - r_4^2 = 0$ 。由式(5)和(6)消去 λ 得 $m = kf_1g_2 - g_1f_2 = 0$ 。将 f_1, f_2, g_1, g_2 的值代入并整理得

$$m = (k-1)(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)[(k\alpha_4 + k\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)x + (k\beta_4 + k\beta_1 - \beta_2 - \beta_3)y] + a_5x^2 + a_4xy + a_3y^2 + a_2x + a_1y + a_0 = 0 \quad (7)$$

其中

$$a_5 = k(\alpha_4^2 + \beta_4^2 - r_4^2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 - r_1^2 + 4\alpha_1\alpha_4) - (\alpha_2^2 + \beta_2^2 - r_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_3^2 - r_3^2 + 4\alpha_2\alpha_3)$$

$$a_4 = 4k(\alpha_1\beta_4 + \alpha_4\beta_1) - 4(\alpha_3\beta_2 + \alpha_2\beta_3)$$

$$a_3 = k(\alpha_4^2 + \beta_4^2 - r_4^2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 - r_1^2 + 4\beta_1\beta_4) - (\alpha_2^2 + \beta_2^2 - r_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_3^2 - r_3^2 + 4\beta_2\beta_3)$$

$$a_2 = -2k[\alpha_1(\alpha_4^2 + \beta_4^2 - r_4^2) + \alpha_4(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - r_1^2)] + 2[\alpha_3(\alpha_2^2 + \beta_2^2 - r_2^2) + \alpha_2(\alpha_3^2 + \beta_3^2 - r_3^2)]$$

$$a_1 = -2k[\beta_1(\alpha_4^2 + \beta_4^2 - r_4^2) + \beta_4(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - r_1^2)] + 2[\beta_3(\alpha_2^2 + \beta_2^2 - r_2^2) + \beta_2(\alpha_3^2 + \beta_3^2 - r_3^2)]$$

$$a_0 = k(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - r_1^2)(\alpha_4^2 + \beta_4^2 - r_4^2) - (\alpha_3^2 + \beta_3^2 - r_3^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 - r_2^2)$$

由式(7)可知, 2 个类射影对应圆束相交所构成的曲线是重虚圆点四次曲线。当 $k=1$ 时, 4 次项消失, 曲线退化为三次虚圆点曲线; 因为式(5)和(6) 2 圆束中圆的一一对应因 k 的不同而不同, 所以, 当 k 取不同的值时, 可得到不同的曲线, 其交点轨迹也不同。

例 给出 2 个圆束 $f_\lambda = (x-3)^2 + (y-3)^2 - 9 + \lambda[(x-2)^2 + (y-2)^2 - 4] = 0, g_{k\lambda} = (x-2)^2 + y^2 - 1 + k\lambda[(x-3)^2 + y^2 - 1] = 0$ 。其交点轨迹的方程为 $m = (k-1)(x^2 + y^2)^2 - 2(3k-2)(x^2 + y^2)(2x+y) + (53k-23)x^2 + (36k-16)xy + (17k-7)y^2 + (-66k+28)x + (-48k+12)y + 72k-12 = 0$ 。当 $k \neq 1$ 时, 可得到不同的四次曲线, 如图 3 所示。

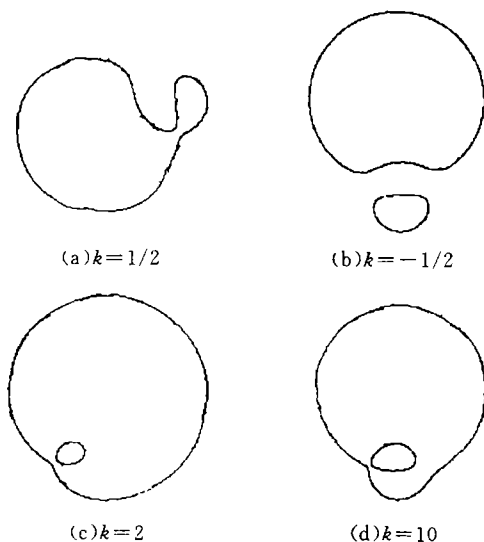


图 3 不同 k 值时各种重虚圆点四次曲线图

4 结束语

重虚圆点四次曲线在实践中用途很广。笔者提出并研究了它的2种构成方法,采用此方法可以借助计算机精确绘制这类曲线的图形。这对计算机高次曲线和曲面造型具有参考价值。

参 考 文 献

- 1 Basset A B. An elementary treatise on cubic and quartic curves. London: Cambridge Deighton Bell and Co, 1901. 133~134
- 2 马忠林. 几何学. 长春:吉林人民出版社,1984. 297~304
- 3 许志群,吴海霞. 射影几何基础. 北京:高等教育出版社,1987. 102~110
- 4 边 欣. 四次曲线的基本理论及其构成方法的研究:[学位论文]. 北京:中国农业大学,1991

www.cnki.net