

## 2 维梁有限变形的精确理论和近似理论<sup>①</sup>

李进京<sup>②</sup> 李明瑞 李 辛

(中国农业大学工程基础科学部)

**摘 要** 提出了用以判别梁的有限变形精确理论与近似理论的 3 条准则,在李明瑞的 2 维梁有限变形精确理论的基础上推导出几种合理的简化理论,将 Reissner-Simo 理论补充成为完整的近似理论,通过算例对各种理论作了比较。

**关键词** 2 维梁;有限变形;精确理论;近似理论;判别准则

**分类号** O 343.5

### Exact and Approximate Finite Deformation Theories of 2-D Beam

Li Jinjing Li Mingrui Li Xin

(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

**Abstract** The criteria used to classify exact and approximate finite deformation theories are proposed. Based on the exact finite deformation theory of 2-D beam proposed by Li, several useful approximate finite deformation theories are derived. The Reissner-Simo theory is discussed and made into complete approximate. Numerical examples are calculated in different theories for comparison.

**Key words** 2-D beam; finite deformation; exact theory; approximate theory; criteria

梁理论是一种简化、实用的结构力学理论。所有的梁理论都采用了某种力学模型,普遍应用的是忽略剪切效应的 Bernoulli 梁理论与考虑剪切效应的 Timoshenko 梁理论,其共同点是都采用平截面假设这一简化模型。梁理论与连续介质理论的区别在于引进了所谓的转角自由度。由连续介质理论发展而来的各种各样的梁理论,均在不同程度上表现出与连续介质理论脱节,例如没有参考位形的概念、不区分 Lagrange 描述与 Euler 描述,应变是自由定义的,应变应力对不满足能量共轭关系等<sup>[1~3]</sup>;因此也就不能推导出精确的平衡方程,由此得到的只能是近似理论。为补救这些理论之不足,不得不限制应变和转角的大小,或者限制加载步长的大小以保证相邻位形的接近。这些理论必然得出各不相同的结果,甚至同一理论的结果还依赖于加载步长,这显然与纯几何非线性的本质相悖。

文献[4~6]严格遵循连续介质力学理论体系,采取 Timoshenko 梁模型,用 Lagrange 描述推导出梁上任意点处的 Green-Lagrange 应变表达式,又严格根据 Green-Lagrange 应变与 Kirchhoff 应力的能量共轭关系得出平衡方程,由此首次提出了 Timoshenko 模型意义下的梁

收稿日期:1998-05-21

①国家自然科学基金资助项目

②李进京,北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区)75 信箱,100083

的有限变形精确理论,对应变的大小或加载步长的大小完全不作限制,使梁的有限变形理论完全建立在连续介质力学理论的基础上。

本文基于有限变形的几何关系与能量关系,提出 3 条区分精确理论与近似理论的判别准则,论证了被国际上许多文献资料认为是精确理论的 Reissner-Simo 理论只是一种近似理论,并进一步在精确理论的基础上引进合理的简化假设,提出几种新型、实用且具有高精度的简化近似理论。

### 1 2 维梁有限变形精确理论概要

基于 Lagrange 物质描述和 Timoshenko 梁模型,以初始位形为参考位形,文献[4~6]提出了如下的梁有限变形运动学描述:如图 1 所示,以垂直于中轴线的任一法截面上位于主轴方向的线段 AB 为研究对象,其中 A 为法截面与中轴线的交点,B 在主轴上。AB 在初始时刻  $t_0$  处于  $A_0B_0$  位置,在当前时刻  $t$  处于  $A_1B_1$  位置。AB 的运动完全刻划了梁的运动。

取  $A_0$  为坐标原点,中轴线的切线为  $x$  轴,法截面主轴为  $y$  轴,则矢量  $\overrightarrow{A_0B_0}$  可表示为  $(0, y)^T$ 。令点 A 与 B 的位移分别为  $\mathbf{u}_A = (u, v)^T, \mathbf{u}_B = (U, V)^T$ ,则点 B 的位移可看作是线段 AB 随点 A 的平动位移与线段 AB 绕点  $A_1$  的转动位移的合成。容易求得点 B 的位移为

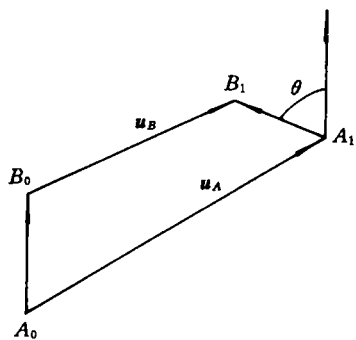


图 1 线段 AB 自  $t_0$  至  $t_1$  的运动

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y \sin \theta \\ y(1 - \cos \theta) \end{bmatrix} \tag{1}$$

将式(1)对  $x, y$  取导,然后可求得点 B 的描述 2 维梁的有限变形的 Green-Lagrange 应变为

$$E_{xx} = U_x + (U_x^2 + V_x^2)/2 = \epsilon + y^2 \theta_x^2 / 2 - y \theta_x \lambda, \tag{2a}$$

$$E_{xy} = U_y + V_x + U_x U_y + V_x V_y = \lambda_n \tag{2b}$$

$$E_{yy} = V_y + (U_y^2 + V_y^2)/2 = 0 \tag{2c}$$

其中

$$\epsilon = u_x + (u_x^2 + v_x^2)/2$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + u_x \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + u_x) \cos \theta + v_x \sin \theta \\ -(1 + u_x) \sin \theta + v_x \cos \theta \end{bmatrix}$$

$\epsilon$  是中轴线处的 Green-Lagrange 正应变。如果用  $(1, 0)^T$  表示在初始位形中过点  $A_0$  的中轴线的单位切矢量,则在当前位形中该矢量将变成过点  $A_1$  的中轴线的切矢量  $\lambda = (1 + u_x, v_x)^T$ 。令矢量  $n$  表示当前位形中截面所在位置的矢量,令矢量  $s$  与矢量  $n$  垂直,则  $s$  与  $n$  构成一对新的直角标架。显然  $(1 + u_x, v_x)^T$  与  $(\lambda_s, \lambda_n)^T$  是同一切矢量  $\lambda$  在变形前后 2 个不同坐标系中的投影表示。切矢量  $\lambda$  充分表征了中轴线的变形(大小和方向)。

为简单起见,不妨假设 Green-Lagrange 应变与 Kirchhoff 应力之间满足下列线性的本构关系:

$$\begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{xy} \end{bmatrix} \quad (3)$$

这里,关键在于当选定 Green-Lagrange 应变来描述变形时,必须选择 Kirchhoff 应力,因为二者满足能量共轭关系,使能得出精确的虚功表达式。至于 Kirchhoff 应力与 Green-Lagrange 应变满足什么样的本构关系,对本文的理论来说是次要的。本构关系可以是弹性的,也可以是超弹性或亚弹性的,也可能是进入塑性后的某种本构关系,本文的几何理论可以同任何一种本构关系结合。

定义截面的 Kirchhoff 内力为

$$N = \int S_{xx} dA, Q = \int S_{xy} dA, M = \int -y S_{xx} dA, T = \int y^2 S_{xx} dA \quad (4)$$

将式(2)和(3)代入(4)可得  $N = EA\epsilon + EI\theta_x^2/2, Q = GA_x\lambda_n, M = EI\theta_x\lambda_s, T = EI\epsilon + EI_x\theta_x^2/2$ 。

由于 Green-Lagrange 应变与 Kirchhoff 应力共轭,内力虚功可表示为

$$\delta W = \int_{V_0} (S_{xx}\delta E_{xx} + S_{xy}\delta E_{xy}) dV \quad (5a)$$

利用内力表达式,内力虚功又可表示为

$$\delta W = \int_{L_0} [N\delta\epsilon + Q\delta\lambda_n + M\delta(\theta_x\lambda_s) + T\delta(\theta_x^2/2)] dx \quad (5b)$$

由虚功原理和有限元方法可进一步推出有限元平衡方程。

## 2 各种有限变形近似理论

首先提出 3 条判别准则,用以区分近似几何非线性理论、近似有限变形理论和精确有限变形理论:准则 A,对应变大小不作限制;准则 B,刚体位移不产生附加应变;准则 C,在内力虚功中所选用的应变与应力对,应满足能量共轭条件,以给出完整的内力虚功。

准则 A 和 B 是几何要求,准则 C 是能量要求,于是可将全部几何非线性理论分成 3 类:凡不能同时满足准则 A 和 B 的几何非线性理论,可称为近似几何非线性理论;凡满足准则 A 和 B 但不满足 C 的几何非线性理论可称为近似有限变形理论;凡同时满足准则 A, B 和 C 的几何非线性理论则为精确有限变形理论。

任意定义的应变与应力只能给出近似的内力虚功,它不等于外力虚功,也就不能由此导出精确的平衡方程。本文前节介绍的理论能给出完整的内力虚功,完全符合 3 条判别准则,使梁的有限变形理论与连续介质力学理论接轨而并无特殊性,因而是一种精确的梁有限变形理论。

在下面的叙述中,以 ET 标记精确理论,分别以 A1, A2, ... 标记近似理论 1, 近似理论 2, ...

**A1.** 当梁的截面高度远较其长度为小时,可抛弃有关  $y^2$  的高阶项,于是可得近似 Green-Lagrange 应变  $\epsilon_1 = \epsilon - y\theta_x\lambda_s, \gamma_1 = \lambda_n$ 。仍采用式(3)的本构关系,可得近似 Kirchhoff 应力  $S_{xx}^{(1)} = E\epsilon_1, S_{xy}^{(1)} = G\gamma_1$ 。由式(4)可得近似 Kirchhoff 内力  $N^{(1)} = EA\epsilon, Q^{(1)} = GA_x\lambda_n, M^{(1)} = EI\theta_x\lambda_s$ 。此时内力虚功可近似表示为

$$\delta W = \int_{V_0} (S_{xx}^{(1)}\delta\epsilon_1 + S_{xy}^{(1)}\delta\gamma_1) dV$$

或

$$\delta W = \int_{L_0} [N^{(1)}\delta\epsilon + Q^{(1)}\delta\lambda_n + M^{(1)}\delta(\theta_x\lambda_s)] dx$$

由于抛弃有关  $y^2$  的高阶项, 内力  $T$  也就为零。

**A2.** 当中轴线变形量不大时, 可近似取  $\lambda_s = 1$ , 于是可在 A1 的基础上进一步简化。定义近似 Green-Lagrange 应变  $\epsilon_2 = \epsilon - y\theta_x, \gamma_2 = \lambda_n$ 。利用本构关系式(3)和内力应力关系式(4)可得近似 Kirchhoff 应力与 Kirchhoff 内力  $S_{xx}^{(2)} = E\epsilon_2, S_{xy}^{(2)} = G\gamma_2, N^{(2)} = EA\epsilon, Q^{(2)} = GA_s\lambda_n, M^{(2)} = EI\theta_x$ 。内力虚功可近似表示为

$$\delta W = \int_{V_0} (S_{xx}^{(2)}\delta\epsilon_2 + S_{xy}^{(2)}\delta\gamma_2) dv \quad (6a)$$

或

$$\delta W = \int_{L_0} (N^{(2)}\delta\epsilon + Q^{(2)}\delta\lambda_n + M^{(2)}\delta\theta_x) dx \quad (6b)$$

**Reissner-Simo 理论** 这套理论首先由 Reissner<sup>[7,8]</sup> 提出, Simo<sup>[9,10]</sup> 加以发展、推广应用于板壳理论中, 并被某些文献<sup>[11,12]</sup> 誉为精确理论。下面介绍时, 没有采用原文符号, 以与上文的符号一致。

Reissner 定义正应变  $\epsilon_R = (\lambda_s - 1)/1$ , 切应变  $\gamma_R = \lambda_n$ 。由于以上应变定义中不包含  $\theta_x$ , 再引进曲率  $\kappa_R = \theta_x$ 。Reissner 定义正应变的方法显然不是 Green-Lagrange 应变的定义方法, 而是传统的小应变定义方式。由于以上应变定义中没有描述应变沿截面高度的变化, 因而无法定义应力, 故 Reissner 引进内力与应变的本构关系:

$$\begin{bmatrix} N^{(3)} \\ Q^{(3)} \\ M^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA_s & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_R \\ \gamma_R \\ \kappa_R \end{bmatrix}$$

由此定义内力虚功为

$$\delta W = \int_{L_0} (N^{(3)}\delta\epsilon_R + Q^{(3)}\delta\lambda_n + M^{(3)}\delta\theta_x) dx \quad (7)$$

式(7)与式(6b)虽在形式上一样, 但实质不同: 式(6)既可用应力应变也可用内力应变表示, 其本构关系仍为应力应变关系(3), 内力是由式(4)导出的, 而非独立定义; 但式(7)只能由内力应变表示, 由于无法定义应力, 这套理论实际上是不完整的, 故 Simo 称之为 Stress Resultant Theory<sup>[10]</sup>。特别应当指出的是, Reissner-Simo 理论的应变与内力之间的能量共轭关系是没有得到证明的, 也是不可能证明的, 式(7)只是近似的虚功表达式。

**A3.** 由前面介绍的几种近似理论的启发, 我们不难对 Reissner-Simo 理论予以补充, 使其成为一套完整的近似理论。定义应变为  $\epsilon_3 = (\lambda_s - 1) - y\theta_x, \gamma_3 = \lambda_n$ , 于是, 仍可利用本构关系(3)与内力应力关系(4), 使内力虚功既可用式(7)表达, 更可用应力应变关系表达成

$$\delta W = \int_{V_0} (S_{xx}^{(3)}\delta\epsilon_3 + S_{xy}^{(3)}\delta\gamma_3) dv \quad (8)$$

使式(7)成为式(8)的导出关系, 从而将 Reissner-Simo 理论补充成为一套完整的有限变形近似理论。A3 的有限单元设计与计算结果将与 Reissner-Simo 理论的结果完全相同。

从以上各种近似理论的得出过程可以看出, 3 种近似理论与精确理论采用了相同的本构

关系(3)、内力应力关系(4)和虚功表达式(5),它们与精确理论的区别以及它们相互之间的差别在于正应变定义的不同(剪应变的定义是相同的)。虚功表达式(5)的本质含义是 Green-Lagrange应变与 Kirchhoff 应力在初始位形上的能量共轭,3种近似理论中应变的定义具有一定的任意性,不是真正的 Green-Lagrange 应变,而它们又都采用了本构关系(3)和虚功表达式(5),这就决定了它们只能是近似理论。Reissner-Simo 理论的应变定义中没有描述应变沿截面高度的变化,就理论的系统性而言,它是一种不完整的近似理论。A3 对 Reissner 理论的应变定义予以补充,使之成为完整的近似理论,但 A3 与 Reissner 理论将导出同样的平衡方程。

### 3 数值算例

在下面的几个算例中,均设定收敛条件为  $r_u < \epsilon, r_f < \epsilon$ , 允许误差  $\epsilon = 1 \times 10^{-10}$ , 其中  $r_u = \|\Delta u\|/\|u\|$  是位移增量与总位移的欧几里得模之比,  $r_f = \|\Delta r\|/\|\Delta P\|$  是不平衡力与加载步载荷增量的欧几里得模之比。它们均用 Newton 切线法求解,采用 Gauss 数值积分,积分点数=单元节点数-1。

**算例 1** 悬臂直梁加一始端弯矩将其弯成一圆。由理论分析可知,当  $M = 2\pi EI/L$  时,直梁将弯成一圆(如图 2)。

当采用 2 个 4 节点单元时,只有 ET 和 A1 能够 4 步加载弯曲成圆,A2 能够在 8 步加载时弯曲成圆,A3 在 16 步加载时也不收敛。当采用 2 个 5 节点单元时,只有 ET 和 A1 能够 4 步加载弯曲成圆,A2 能够在 8 步加载时弯曲成圆,A3 能够在 16 步加载时弯曲成圆。当采用 8 个 4 节点单元

$E=720$   
 $G=360$   
 $A=1$   
 $I=5/30$   
 $l=120$   
 $M=2\pi$

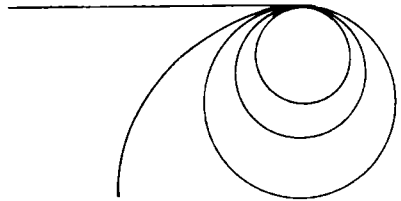


图 2 悬臂直梁弯曲成圆

(总节点数为 25)时,只有 ET 和 A1 能够 4 步加载弯曲成圆,A2 和 A3 能够在 8 步加载时弯曲成圆。

**算例 2** 悬臂梁受 2 个横向载荷。Crivelli 曾对此算例作过详细研究<sup>[13]</sup>,他用 10 步加载方法求得结果,而精确理论通过 1 步加载即可。为了与其他文献的结果进行比较,笔者用精确理论并对网格采用不断细化的方法来求 4 位有效数字的精确解,当选用多于 6 个单元不再能提高精度时,即认为 4

$E=3.0 \times 10^7$   
 $G=1.1538 \times 10^7$   
 $A=0.2$   
 $I=0.1667$   
 $F_1=850$   
 $F_2=1350$   
 $l_1=52.03$   
 $l_2=102.75$

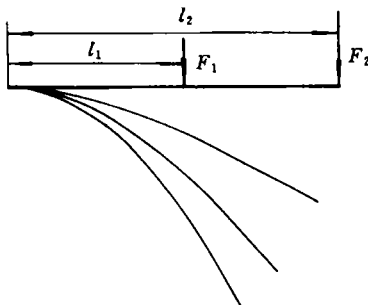


图 3 受 2 个横向载荷的悬臂梁

位精确有效数字的结果是合适的。图 3 给出了悬臂梁的变形图。

笔者分别用 3 种近似理论进行计算,也选用 6 个 4 节点单元。结果表明,只有 ET 与 A1 能够 1 步加载收敛,A2 能够 2 步加载收敛,A3 需 3 步加载才收敛。表 1 列出了精确理论和 3 种近似理论梁自由端位移的计算结果。可以看出,

表 1 算例 2 分 3 步加载时梁端位移的计算结果

位移	ET	A1	A2	A3
$u$	30.79	30.78	30.76	30.76
$v$	67.03	67.02	67.02	67.02
$\theta$	1.043	1.043	1.043	1.043

A1 的精度比 A2 和 A3 稍高,这是由于近似理论内力所作的功扔掉了部分项,A1 扔掉的项较少,所以其精度较高;还可以看出,精确理论的位移值最大,这与最小势能原理完全符合。

**算例 3** 悬臂梁在自由端受一垂直随动载荷作用。此算例由 J. H. Argyris<sup>[14]</sup>提出,J. C. Simo<sup>[9]</sup>也曾加以研究。文献[14]给出了 134 步加载(步长  $P=1\ 000$ )的结构变形图和载荷一位移曲线。文献[11]采用 Reissner-Simo 理论,用 5 个 3 节点单元计算,只给出了 130 步加载(步长  $P=1\ 000$ )的结构变形图和载荷一位移曲线。笔者采用精确理论,也用 5 个 3 节点单元进行计算,图 4(a)是计算所得的 197 步加载(步长  $P=1\ 000$ )的变形图,图 4(b)是自由端点的载荷一位移曲线( $F-u, F-v$ )。可以看出,梁在最后阶段水平位移出现变小现象,本文中称此现象为回摆。

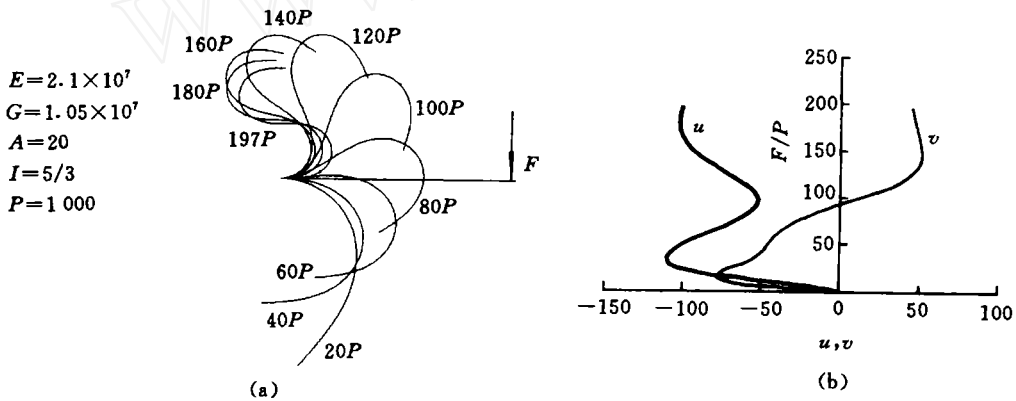


图 4 自由端受垂直随动载荷  $F$  的悬臂梁的变形图(a)和自由端的载荷一位移图(b)

为了研究不同理论的计算效率,笔者采用 24 个 3 节点单元,对精确理论和近似理论进行步长变化试验。结果表明:当加载步长  $P=5\ 000$  时,ET, A1, A2 和 A3 仍然都能加载到 40 个载荷步;当加载步长  $P=10\ 000$  时,ET, A1 和 A2 都能加载到 20 步, A3 一步也不能计算;无论是 ET 还是 A1, A2 和 A3,只要收敛计算结果就几乎没有变化,即在收敛步内,计算结果可以说与步长无关。这正是纯几何非线性问题的特点。

## 4 结 论

基于几何与能量要求,本文作者提出了 3 条判别准则,用以区分近似几何非线性理论、近似有限变形理论和精确有限变形理论。在提出的 Timoshenko 梁精确有限变形理论的基础上,通过不同简化又提出了几种近似有限变形理论,指出了 Reissner-Simo 理论的缺点,论证了它只是一种近似的不完整的有限变形理论,并将之补充成为一种完整的近似理论,即 A3。通过数值算例对精确理论与几种近似理论进行了比较,结果显示:简化越少,则精度越高,且可使用的步长越大。由于纯几何非线性问题的计算结果与步长和步数无关,可使用的步长越大意味着计算效率越高。对于简单问题,可以用不断细化网格的方法,用精确理论得到问题的精确的指定有效位数的数值解。近似理论解的精度则可通过与上述解的比较得出。在各种近似理论中,笔者推荐 A1,它的精度和计算效率与 ET 几乎相当。

无论是精确理论还是各种近似理论都可推广至 3 维梁和板壳的有限变形中去。上述的 3

条判别准则,同样适用于3维梁和板壳。3维梁和板壳的有限变形精确理论已在文献[5,6]中提出。近似理论可以用类似方法导出。

### 参 考 文 献

- 1 鹭津久一郎著. 弹性和塑性力学中的变分法. 老亮, 郭松林译. 北京: 科学出版社, 1984. 146~167
- 2 藤宁钧, 武际可. 任意平面刚架的几何非线性分析. 计算结构力学及其应用, 1987, 4(2): 25~33
- 3 黄文, 李明瑞, 黄文彬. 杆系结构的几何非线性分析: (I) 平面问题. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(1): 7~15
- 4 Li Mingrui. The finite deformation theory for beam, plate and shell (Part I): The two-dimensional beam theory. *Comput Methods Appl Engrg*, 1997, 146: 53~63
- 5 Li Mingrui. Green-Lagrangian strains of beam, plate and shell structures during finite deformation. *Progress in Natural Science*, 1997, 7(6): 649~661
- 6 Li Mingrui. The finite deformation theory for beam, plate and shell (Part II): The kinematic model and the Green-Lagrangian strains. *Comput Methods Appl Engrg*, 1998, 156: 247~257
- 7 Reissner E. On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory. *Studies in Applied Mathematics*, 1973, 2: 87~95
- 8 Reissner E. On finite deformations of space curved beams. *J Appl Math and Phys*, 1981, 32: 734~774
- 9 Simo J C, Vu-quoi L. A three-dimensional finite-strain rod model (Part II): Computational aspects. *Comput Methods Appl Engrg*, 1986, 58: 79~116
- 10 Simo J C, Fox D D. On a stress resultant geometrically exact shell model (Part I): Formulation and optimal parametrization. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1989, 72: 267~304
- 11 Ibrahimbegovic A, Shakouzadeh H, et al. On the role of geometrically exact and second-order theories in buckling and post-buckling analysis of three-dimensional beam structures. *Comput Struct*, 1996, 6: 1101~1114
- 12 Jelenic G, Saje M. A kinematically exact space finite strain beam model-finite element formulation by generalized virtual work principle. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1995, 120: 131~161
- 13 Crivelli L A, Fellipa C A. A three dimensional nonlinear Timoshenko beam based on the corecongruential formulation. *Int J Numer Methods Engrg*, 1993, 36: 3647~3673
- 14 Argyris J H, Symeonidis S. Nonlinear finite element analysis of elastic systems under nonconservative loading-natural formulation (Part I): Quasistatic problems. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1981, 26: 75~123