

曲壳有限变形研究之二:有限转动理论和数值算例^①

詹福良^② 李明瑞

(中国农业大学工程基础科学部)

摘要 阐明了有限转动的特点和叠加规律,在此基础上推导了转轴的变分规律并具体应用于文《曲壳有限变形研究之一:理论及有限元列式》(见:詹福良,李明瑞.中国农业大学学报,1998,3(6):28~33)。算例表明:本文列式具有明显的平方收敛效率,并且计算结果与加载步长无关,在牛顿极限加载步长之内,由于不受小加载步长、小转动增量等的限制,对大多数问题都可以通过1步加载直接求解。

关键词 有限元;有限变形;有限转动;叠加规律

中图分类号 O 343.5

Study on Finite Deformation of Curved Shells (I): Finite Rotation Theory and Numerical Examples

Zhan Fuliang Li Mingrui

(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Abstract Based on the explanation of the property and summation rule of finite rotation, the corresponding formulae of the variation of the axis of rotation is deduced. Numerical examples show that it is valid and posses quadratic convergence ratio. The computed results are independent of loading steps. Being free from constraints of small loading steps, small rotation increments etc, within the limit of Newton extreme increamental loading, the results of nonlinear problems can be obtained by using only one loading step.

Key words finite element; finite deformation; finite rotation; summation rule

1 有限转动叠加规律

3维空间中有限转动的转轴从根本上区别于平动位移和微小转角的概念,表现在:

1)有限转动转轴的3个分量是相互耦合的,只有把3个分量当作1个转轴整体才能有效地表征问题,单独地研究其1个分量是没有意义的。

2)空间有限转动是有顺序之分的。如图1的示例,先由A转动 ϕ_1 到B,然后由B转动 ϕ_2 到C,与先由A转动 ϕ_2 到D,然后由D转动 ϕ_1 到E,一般是截然不同的,亦即C和E一般是不会重合的。

3)2次转动的合成不能通过简单叠加来完成。仍如图1的例子,即不能由A转动 $\phi_1+\phi_2$ 到C,也不能由A转动 $\phi_2+\phi_1$ 到E。

收稿日期:1998-06-26

①国家自然科学基金资助项目

②詹福良,北京清华东路17号 中国农业大学(东校区)213信箱,100083

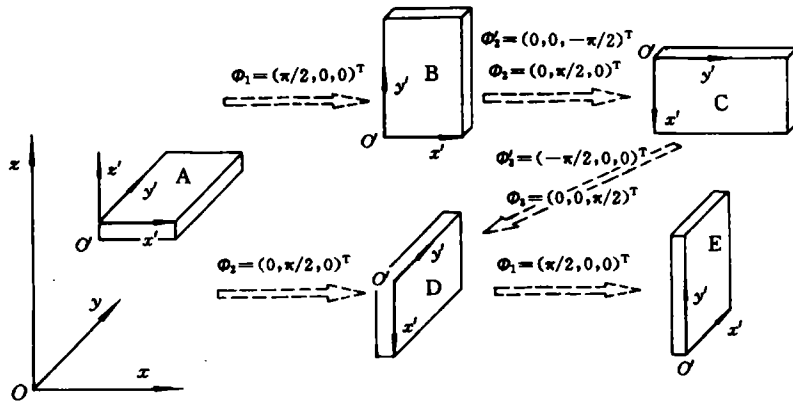


图 1 有限转动示例

为此,对 3 维空间中的有限转动问题,必须有它特殊的研究方法^[1]。这里只对与我们的应用至关重要的转动叠加理论作简要的描述。

1.1 欧拉参数引入

仍设 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ 是一转轴向量, $\theta = \|\Theta\|$ 是 Θ 的欧拉模, 定义

$$e_i = \theta_i / \theta \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\lambda_0 = \cos(\theta/2), \quad \lambda_i = e_i \sin(\theta/2) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

并记 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$, 则把 $(\lambda_0, \lambda^T)^T$ 合称转轴 Θ 的欧拉参数。

1.2 有限转动叠加

参考图 1, 设定坐标系 xyz 内, 先有转动 $\Phi_1 = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13})^T$, 再有转动 $\Phi_2 = (\varphi_{21}, \varphi_{22}, \varphi_{23})^T$, 它们对应的转动矩阵^[2]分别记为 T_1 和 T_2 , 则 2 次转动合成之后等效的 1 次转动的转动矩阵为 $T = T_2 T_1$; 但是, 欲求 2 次转动合成后等效的 1 次转动的转轴 Φ , 须引入初始与 xyz 重合的随动坐标系 $x'y'z'$ 来考虑。仍如图 1, 先有转动 Φ_1 , 此时 $x'y'z'$ 也随着转动到新的位置, 设定坐标系 xyz 内再有的转动 Φ_2 在该 $x'y'z'$ 下描述时为 $\Phi'_2 = (\varphi'_{21}, \varphi'_{22}, \varphi'_{23})^T$, 则有 $\Phi'_2 = T_1^T \Phi_2$ 。由 1.1 欧拉参数的定义可得 Φ_1 和 Φ'_2 各自对应的欧拉参数, 并分别记为 $(q_0, q^T)^T$ 和 $(d_0, d^T)^T$; 同时设前面 2 次转动合成后等效的 1 次转轴 Φ 对应的欧拉参数为 $(p_0, p^T)^T$, 则 $(p_0, p^T)^T$ 可由 $(q_0, q^T)^T$ 和 $(d_0, d^T)^T$ 按下式求得:

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 & -d^T \\ d & d_0 I - S(d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q^T \\ q & q_0 I + S(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d \end{bmatrix}$$

然后, 再根据式(1)反求 $(p_0, p^T)^T$ 对应的 $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ 的各个分量, 于是合成后等效的 1 次转轴 Φ 即得。实际上, 这里定义的欧拉参数的叠加过程就是 4 元数叠加规律。不妨仍按文献[2]形象地记为 \oplus , 则读者可容易地验证图 1 中有 $\Phi_1 \oplus \Phi'_2 \oplus \Phi_3 = \Phi_2$ 成立, 亦即由 A 依次转动 Φ_1, Φ_2, Φ_3 到 D 对应等效的 1 次转动即为 Φ_2 , 这一点从图上也可以直观地看出。

需要指出的是, 当合成后的转轴 Φ 的欧拉模 $\varphi = \|\Phi\|$ 等于或接近 $2k\pi$ (k 为整数) 时, 欧拉参数中的 p 会相应成为或接近零向量, 从而反求 Φ 会出现奇异。从物理意义上看, 这实际是转动后的位置与转动前重合的特殊情况, 因而这种情况下转轴的方向有无穷多种, 从而导致无法确定该合成后的转轴。解决这一问题有 2 种办法: 1) 当 φ 接近奇异点到规定的误差范围之内时,

即不再反求 Φ , 而直接赋值 Φ 为 0 向量。2) 在应用中只引入欧拉参数作为基本未知量, 而不再反求 Φ 。文献[3]也曾提到这种运用。

2 对转轴的微分和变分及其具体应用

正因为有限转动的转轴与线位移相比具有耦合和叠加上的特殊性, 所以对转轴的微分和变分也与线位移的情况有所不同。这里主要介绍法线位移和转动矩阵对转轴的微分和变分, 并将文献[2]中涉及对转轴微分和变分的具体列式也在此处来讨论。

2.1 一般表达式

如图 2(a), 在坐标系 xyz 内设转轴 Θ 对应转动矩阵 T 使法线 r_0 转动到 r_1 , 此时一个微小的转轴增量 $d\Theta$ 对应转动矩阵 \hat{T} 使 r_1 转动到 \hat{r}_1 , 则写出 r_1 关于 $d\Theta$ 的微分形式

$$dr_1 = \lim_{d\Theta \rightarrow 0} (\hat{r}_1 - r_1) = \lim_{d\Theta \rightarrow 0} (\hat{T} - I)r_1 = \lim_{d\Theta \rightarrow 0} \hat{T}^* r_1 \quad (2)$$

根据转动矩阵的表达式, 容易得到 $\lim_{d\Theta \rightarrow 0} \hat{T}^* = S(d\Theta)$, 代入式(2)则有

$$dr_1 = S(d\Theta)r_1 = S^T(r_1)d\Theta = d\Theta \times r_1 = -r_1 \times d\Theta \quad (3a)$$

式(3a)即为法线位移对转轴微分的一般表达。同样可以写出对应的变分形式

$$\delta r_1 = S(\delta\Theta)r_1 = S^T(r_1)\delta\Theta = \delta\Theta \times r_1 = -r_1 \times \delta\Theta \quad (3b)$$

同时又由于 $r_1 = Tr_0$, $dr_1 = d(Tr_0) = d(T)r_0$, 代入式(3)则可得转动矩阵 T 对转轴的微分和变分的一般表达形式

$$d(T) = S(d\Theta)T, \delta(T) = S(\delta\Theta)T \quad (4)$$

有了这些基本关系, 下面对文献[2]中 2 个与转轴变分有关的列式进行具体推导。

2.2 应用于求文[2]中的 L 矩阵

根据文[2]中的式(5)写出文[2]中式(14)的具体形式为 $\delta s = L\delta\Theta = (\delta s_1^T, \delta s_2^T, \dots, \delta s_n^T)^T$, 先记

$$\delta s_i = L_i \delta\Theta_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

则

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & & & \\ & L_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

因而重点是求 δs_i 。如图 2(b), 在 xyz 标架内, 直接利用式(3b)可得

$$\delta s_i = \delta r_{i1}^0 = S^T(r_{i1}^0)\delta\Theta_i \quad (7)$$

注意图中除了定坐标系 xyz 仍引入了随动坐标系 $x'y'z'$, 并把 $d\Theta_i$ 在 $x'y'z'$ 内的描述记为

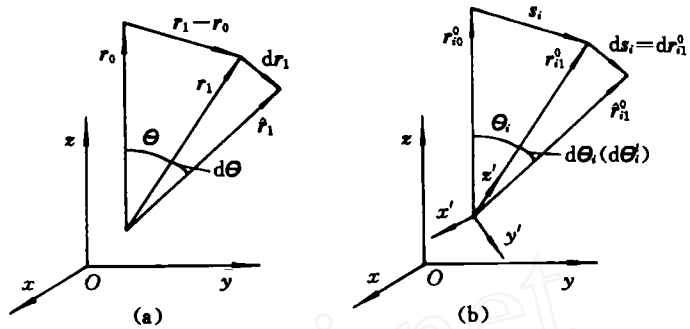


图 2 对转轴微分的一般形式(a)和具体应用(b)

$d\theta_i^e$, 是因为实际应用中需要用 $d\theta_i^e$ 表达的 δs_i , 则根据 xyz 和 $x'y'z'$ 的转换关系, 并利用叉乘矩阵的张量性质, 式(7)可写为 $\delta s_i = S^T(T_i, r_{i0}^0) \cdot T_i \delta\theta_i^e = T_i S^T(r_{i0}^0) T_i^T \cdot T_i \delta\theta_i^e = T_i S^T(r_{i0}^0) \cdot \delta\theta_i^e$, 代入式(5)即得

$$L_i = T_i S^T(r_{i0}^0) = -T_i S(r_{i0}^0) \quad (8)$$

再将 L_i 代入式(6)即得 L 矩阵。须明确指出的是, 这里采用在随动坐标系 $x'y'z'$ 内定义的 $d\theta_i^e$ 列式, 导致平衡方程中外载(右端项)对应的 3 个弯矩分量也必须是在 $x'y'z'$ 内定义的随动载荷才有意义, 也就是说, 该列式要求外载中的弯矩分量是与法线一起转动的随动载荷。

2.3 应用于求文[2]中的 M_{xx} 矩阵

将式(6)代入文[2]中的式(20), 有

$$M_{xx} d\theta = dL^T \Omega_x^T \Lambda_x = \begin{bmatrix} dL_1^T \Omega_{1x}^T \Lambda_x & & & \\ & dL_2^T \Omega_{2x}^T \Lambda_x & & \\ & & \ddots & \\ & & & dL_n^T \Omega_{nx}^T \Lambda_x \end{bmatrix}$$

先记

$$dL_i^T \Omega_{ix}^T \Lambda_x = M_i d\theta_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

则有

$$M_{xx} = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

下面进一步求 M_i , 须计算 $dL_i^T \Omega_{ix}^T \Lambda_x$ 。由式(8)有

$$dL_i^T \Omega_{ix}^T \Lambda_x = d[S(r_{i0}^0) T_i^T] \Omega_{ix}^T \Lambda_x = S(r_{i0}^0) d(T_i^T) \Omega_{ix}^T \Lambda_x \quad (11a)$$

这里重点是计算 $d(T_i^T)$ 。利用式(4)并同样考虑 xyz 和 $x'y'z'$ 的转换以及叉乘矩阵的张量性质, 有 $dT_i = S(d\theta_i) T_i = S(T_i d\theta_i^e) T_i = T_i S(d\theta_i^e) T_i^T \cdot T_i = T_i S(d\theta_i^e)$, 则 $d(T_i^T) = S^T(d\theta_i^e) T_i^T$ 。以此代入式(11a), 得到

$$dL_i^T \Omega_{ix}^T \Lambda_x = S(r_{i0}^0) S^T(d\theta_i^e) T_i^T \Omega_{ix}^T \Lambda_x = S(r_{i0}^0) S(T_i^T \Omega_{ix}^T \Lambda_x) d\theta_i^e \quad (11b)$$

根据式(9)便得到 $M_i = S(r_{i0}^0) S(T_i^T \Omega_{ix}^T \Lambda_x)$ 。容易看出, 这里 M_i 一般是非对称的, 所以代入式(10)后得到的矩阵 M_{xx} 也是非对称的; 但由于此处的不对称现象相对整体刚度矩阵而言只是局部的相对次要的因素, 所以实际计算中可以忽略其不对称性而直接采用对称求解器求解, 效果也很好。

2.4 小结

我们把本节对转轴的微分和变分的这套方案称为叉乘方案。笔者充分考虑了有限转动的特点和叠加规律, 把增量转轴作为一个整体来对待, 这不同于向转轴的各个分量直接硬求导数^[3,4]的做法。因为空间转轴向量是各分量相互耦合的伪矢量, 必须由 3 个分量共同表征问题才有意义; 同时转轴 θ 在增量转轴 $d\theta$ 作用下, 也不能由 $\theta + d\theta$ 简单求和得到新的转轴, 而必须通过 4 元数法则来叠加; 所以, 一般地讲, 对函数 $f(\theta)$ 简单地向其转轴 θ 的 3 个分量 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 分别求导数或微分是不具有实际意义的。这套叉乘方案在使本来极为繁琐的求导过程得到

简化的同时,也更符合有限转动的客观规律,因而更可取。下面通过算例来证明这一理论和列式的有效性。

3 数值算例

3.1 刚体转动

通过对结构转动轴线上的节点的线位移自由度给予约束而对其转轴自由度给予指定位移的方法,分别进行平壳和曲壳结构的刚体转动模拟。将结构离散为单个或单个的单元网格均可顺利通过,无论平壳还是曲壳单元,刚体转动后结构内部均既无应变也无应力产生。加载步长最大都允许为 $\pi/2$,并且理论上可以无限制地连续加载下去,亦即能够模拟任意角度的刚体转动行为。图3示出一平面单元4步加载结构刚体转动1周的情况。

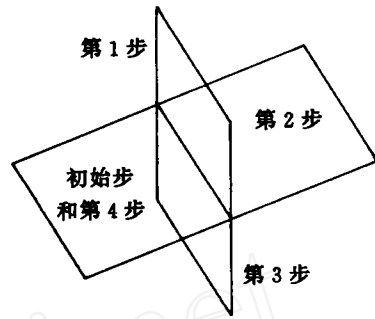


图3 4步加载结构刚体转动1周

3.2 模拟梁的纯弯曲

材料参数及结构参数见图4。其中: E 为弹性模量, ν 为泊松比; l, b, h 分别为梁的长度、宽度和厚(高)度。结构右端固定铰支,左端滑动铰支,两端同时承受弯矩 M 。根据对梁的理论分析,在材料弹性范围内,在弯矩 M 作用下结构应当弯曲成圆弧,并且当 $M = M_{cr} = 2\pi EI/l$ (其中 $I = bh^3/12$ 为梁的抗弯截面模量)时,结构将弯成整圆。

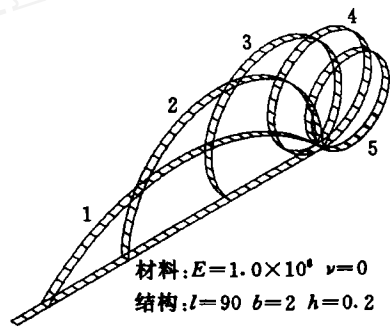


图4 铰支梁两端受集中弯矩变形图

在模拟过程中,分别用8,16,30个8节点单元,采用 $2 \times 2 \times 2$ 数值积分方案进行计算。当单元数超过30时,计算精度已经不再有明显的改观,因此认为这里30个单元得到的结果即为数值意义下的精确解。计算中采用的加载步长为该理论列式的极限步长 $M_{cr}/4$ 。计算结果的变形

图和左端点的位移值分别见图4和表1。可以看出:数值解与理论解基本上完全一致,但当 ν 不为0时,数值解与理论解的差别有扩大。表1中对比列出了 $\nu = 0.3$ 时的数值解和理论解。

表1 铰支梁自由端位移的数值解和理论解

加载步	横向位移 u			法线转角 θ/rad		
	$\nu=0$	$\nu=0.3$	理论解	$\nu=0$	$\nu=0.3$	理论解
1	-8.972	-8.973	-8.972	0.785	0.785	0.785
2	-32.71	-32.70	-32.70	1.571	1.570	1.571
3	-62.99	-63.01	-62.99	2.356	2.354	2.356
4	-90.01	-90.05	-90.00	3.142	3.140	3.142
5	-106.20	-106.30	-106.20	3.928	3.929	3.927

3.3 一般曲壳的有限变形分析

顶端开孔的半球壳结构^[3], 在赤道上分别受 2 个向内和 2 个向外的对称集中力作用。由对

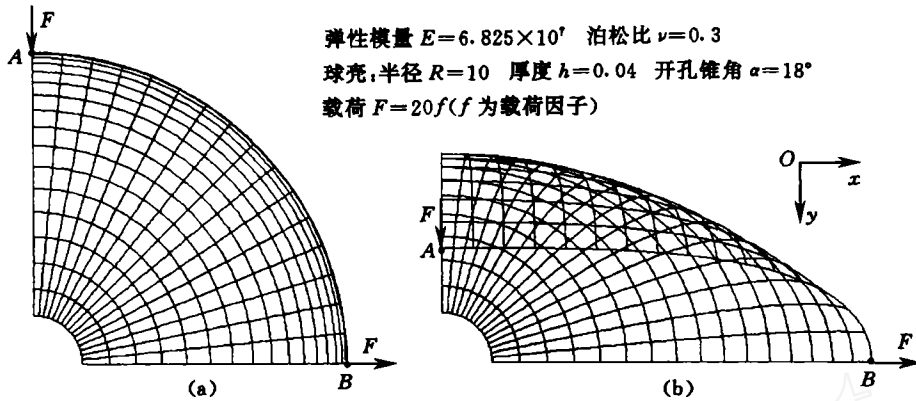


图 5 顶端开孔的半球壳 1/4 结构的初始网格(a)和变形网格(b)

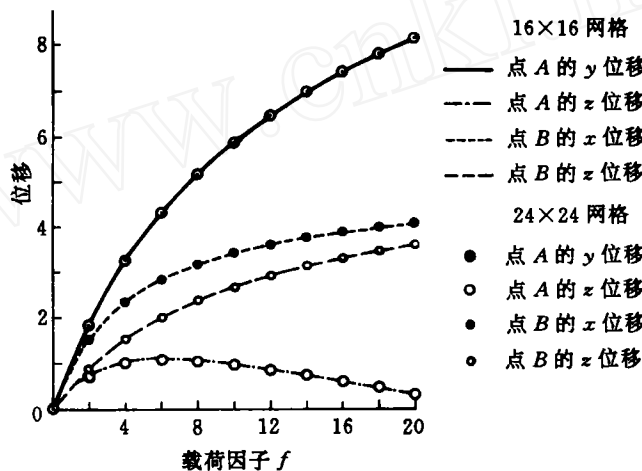


图 6 力作用点处的载荷—位移曲线

称性只取 1/4 结构计算。与文献[3]对应, 图 5 给出了结构参数和用 16×16 个 8 节点单元剖分时结构的初始网格(a)与变形网格(b)。计算中, 在保持平方收敛速度相同的情况下, 可以只用 8~10 步加载便得到文献[3]用 20 步加载得到的结果。图 6 给出了用本文方法得到的 16×16 和 24×24 这 2 种网格剖分情况下载荷作用点 A(受压)和 B(受拉)处的位移—荷载曲线。可以看出, 2 种网格的解已相当接近。由于文献中都没有提供该算例的具体数值结果, 所以无法进行精确比较; 但是由于本文列式与其他各种近似理论列式相比没有引入任何的简化假设, 所以用它得出的数值结果应当更精确一些, 并可以作为一个标准来对比检验其他各种近似理论的优劣。表 2 即列出了用本文方法得到的该算例的部分数值结果。

表2 载荷作用点A和B处的位移

载荷 因子 f	点A的y位移		点A的z位移		点B的x位移		点B的z位移	
	16×16 网格	24×24 网格	16×16 网格	24×24 网格	16×16 网格	24×24 网格	16×16 网格	24×24 网格
10	5.860	5.867	0.971	0.971	3.403	3.408	2.663	2.670
20	8.112	8.148	0.342	0.335	4.060	4.073	3.584	3.605

4 结 论

笔者以位移型退化壳理论为基础,充分发挥刚性线段的运动学模型和有限转动矩阵的作用,抛弃以往的各种简化假设,提出了与3维连续体有限变形基本理论相统一的曲壳有限变形完整理论,详细推导了该理论基于TL方法的有限单元列式。数值检验证明本文理论和列式是非常有效的,对一般问题总有较高的收敛速度,并表现出对大加载步长的良好适应性和计算结果与加载步长的无关性,从而能够可靠地用于板壳结构非线性有限变形问题的求解;同时本文列式也为板壳结构的稳定、屈曲和弹塑性分析提供了一种有力的工具。

参 考 文 献

- 1 Argyris J H. An excursion into large rotations. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1982, 32: 85~155
- 2 詹福良,李明瑞. 曲壳有限变形研究之一:理论及有限元列式. *中国农业大学学报*, 1998, 3(6): 28~33
- 3 Buechter N, Ramm E. Shell theory versus degeneration — a comparison in large rotation finite element analysis. *Int J Numer Methods Engrg*, 1992, 34: 39~59
- 4 Ibrahimbegovic A, Frey F, Kozar I. Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotations. *Int J Numer Methods Engrg*, 1995, 38: 3653~3673