中国农业大学学报　1998,3(4):16～20
Journal of China Agricultural University

非完整系统的动力学偏加速度方程

龙　运　佳①
(中国农业大学工程基础科学部)

摘　要　基于偏加速度概念,给出建立一类非完整动力学系统运动微分方程的一般方法。应用结果表明,该方法比 Appell 方程和 Kane 方程更简便。

关键词　动力学;非完整系统;偏加速度;偏角加速度
中图分类号　O 313.2

Partial Acceleration Equations in Dynamics of Nonholonomic Systems

Long Yunjia
(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Abstract　Based on the concept of partial acceleration, a general method for obtaining the differential equations governing the motions of a class of nonholonomic systems is presented. The application shows that the new method is more simple and convenient to be used than Appell equations and kane equations.

Key words　dynamics; nonholonomic systems; partial acceleration; partial angular acceleration

本文将给出建立一类非完整系统运动微分方程的一般方法。对于完整系统,本方法只要在系统的某个位置作加速度分析,而第 2 类 Lagrange 方程不仅要在系统的任意位置作速度分析,还要对系统动能取导数,其麻烦程度有时会超过加速度分析。对于非完整系统,本方法比第 1 类 Lagrange 方程(即不定乘子法)更简明。本方法比 Appell 方程简单,因为 Appell 方程要计算复杂的 Gibbs 加速度能量,并取导数。本方法比 Kane 方程简捷,因为 Kane 除作加速度分析外,还要作速度分析以计算偏速度,而本方法从加速度分析即可得到偏加速度。

1　运动学

研究一类包含 N 个质点的非完整系统,它在惯性参考系 A 中的形位可用 n 个广义坐标 q_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 确定,而它同时受到 g 个非完整约束,这样,$p=n-g$ 即为系统的自由度数。

令 P_i 为系统中某个质点,其对 A 之矢径为 $\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_n;t)$,则 $\delta\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{a}_i$ 可写成

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{1}$$

收稿日期:1998-03-18
①龙运佳,北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区)74 信箱,100083

$$\boldsymbol{v}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{a}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} \tag{3}$$

由式(2)有

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{4}$$

现选 p 个广义速度 $\dot{q}_r(r=1,2,\cdots,p)$，则

$$\dot{q}_{p+s}=\sum_{r=1}^{p}C_{r,p+s}\dot{q}_r+D_s \qquad (s=1,2,\cdots,g) \tag{5}$$

其中 $C_{r,p+s}$与 D_s 为$(q_1,q_2,\cdots,q_n;t)$的函数。由式(5)有

$$\delta q_{p+s}=\sum_{r=1}^{p}C_{r,p+s}\delta q_r \qquad (r=1,2,\cdots,p;\ s=1,2,\cdots,g) \tag{6}$$

将式(1)右边分成两部分，即

$$\delta \boldsymbol{r}_i=\sum_{r=1}^{p}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r}\delta q_r+\sum_{s=1}^{g}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_{p+s}}\delta q_{p+s} \tag{7}$$

将式(6)代入(7)得

$$\delta \boldsymbol{r}_i=\sum_{r=1}^{p}\boldsymbol{a}_{ir}\delta q_r \tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{a}_{ir}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_r}+\sum_{s=1}^{g}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_{p+s}}C_{r,p+s} \tag{9}$$

对式(5)取导数得

$$\ddot{q}_{p+s}=\sum_{r=1}^{p}C_{r,p+s}\ddot{q}_r+E_s \tag{10}$$

其中

$$E_s=\dot{D}_s+\sum_{r=1}^{p}\dot{C}_{r,p+s}\dot{q}_r$$

将式(3)右边第 1 个连加号部分分成两部分写，则式(3)变成

$$\boldsymbol{a}_i=\sum_{r=1}^{p}\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_r+\sum_{s=1}^{g}\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_{p+s}}\ddot{q}_{p+s}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} \tag{11}$$

将式(10)，(4)和(9)代入(11)得

$$\boldsymbol{a}_i=\sum_{r=1}^{p}\boldsymbol{a}_{ir}\ddot{q}_r+\boldsymbol{U}_i \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{U}_i=\sum_{s=1}^{g}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_{p+s}}E_s+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

从式(12)可知

$$\boldsymbol{a}_{ir}=\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial \ddot{q}_r} \qquad (r=1,2,\cdots,p) \tag{13}$$

这 p 个矢量 $\boldsymbol{a}_{ir}$称为偏加速度。

2 动力学

将式(8)代入动力学普遍方程[1]，有

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_i^*)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$，$\boldsymbol{F}_i^*$ 分别为主动力与惯性力 $-m_i\boldsymbol{a}_i$，m_i 是点 P_i 的质量。由式(14)可得

$$\sum_{r=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{a}_{ir}+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i^*\cdot\boldsymbol{a}_{ir}\right)\delta q_r=0$$

因 $\delta q_r(r=1,2,\cdots,p)$ 相互独立，故

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{a}_{ir}+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i^*\cdot\boldsymbol{a}_{ir}=0 \qquad (r=1,2,\cdots,p)$$

或

$$L_r+L_r^*=0 \qquad (r=1,2,\cdots,p) \tag{15}$$

称式(15)为动力学的偏加速度方程。其中 L_r 定义为

$$L_r=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{a}_{ir} \qquad (r=1,2,\cdots,p) \tag{16}$$

称为第 r 阶广义主动力，而 L_r^* 定义为

$$L_r^*=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i^*\cdot\boldsymbol{a}_{ir} \qquad (r=1,2,\cdots,p) \tag{17}$$

称为第 r 阶广义惯性力。

矢量 $\boldsymbol{a}_{ir}$ 在本方法中起了关键性作用，但不必用式(9)或(13)计算；从式(12)可知，若找到 $\boldsymbol{a}_i$ 的表达式，则 $\boldsymbol{a}_{ir}$ 只是 $\ddot{q}_r$ 前的系数。

3 应 用

例 1 研究如图 1 所示的包含 2 个相同质点 P 与 P' 的 $p=2$ 系统。2 个薄圆轮(设其质量 $m=0$)D 与 D' 的半径均为 R，安放在长为 $2R$ 的杆的两端(可自由转动)。P 与 P' 位于 D 与 D' 的中心。两圆轮在与地面成 θ 角的足够粗糙的斜面上作纯滚动。P 与 P' 的加速度分别为

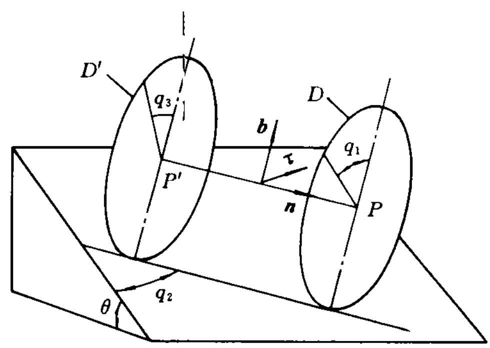

图 1 例 1 与例 2 共用力学简图

$$\boldsymbol{a}_P=\boldsymbol{a}_P^{\tau}+\boldsymbol{a}_P^{n}+\boldsymbol{a}_P^{b}=-R\ddot{q}_1\boldsymbol{\tau}+[\dot{q}_2\boldsymbol{b}\times(-R\dot{q}_1\boldsymbol{\tau})]+0=-R\ddot{q}_1\boldsymbol{\tau}+R\dot{q}_1\dot{q}_2\boldsymbol{n} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{a}_{P'}=\boldsymbol{a}_{P'}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{P'}^{n}+\boldsymbol{a}_{P'}^{b}=-R\ddot{q}_3\boldsymbol{\tau}+[\dot{q}_2\boldsymbol{b}\times(-R\dot{q}_3\boldsymbol{\tau})]+0=-R\ddot{q}_3\boldsymbol{\tau}+R\dot{q}_2\dot{q}_3\boldsymbol{n} \tag{19}$$

因为 $\boldsymbol{a}_{P'}^{\tau}=\boldsymbol{a}_P^{\tau}+\boldsymbol{a}_{P'P}^{\tau}$，$R\ddot{q}_3\boldsymbol{\tau}=R\ddot{q}_1\boldsymbol{\tau}+2R\ddot{q}_2\boldsymbol{\tau}$，所以

$$\ddot{q}_3=\ddot{q}_1+2\ddot{q}_2 \tag{20}$$

将式(20)代入(19)得

$$\boldsymbol{a}_{P'}=-R(\ddot{q}_1+2\ddot{q}_2)\boldsymbol{\tau}+R(\dot{q}_1\dot{q}_2+2\dot{q}_2^2)\boldsymbol{n} \tag{21}$$

由式(13)，(18)和(21)可得偏加速度

$$\boldsymbol{a}_{P1}=-R\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{a}_{P2}=0 \tag{22}$$

$$\boldsymbol{a}_{P'1}=-R\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{a}_{P'2}=-2R\boldsymbol{\tau} \tag{23}$$

系统中的主动力为作用在 P 与 P' 上的 2 个重力,即

$$\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}_2=mg\{\sin\theta\cos q_2\boldsymbol{n}-\sin\theta\sin q_2\boldsymbol{\tau}-\cos\theta\boldsymbol{b}\} \tag{24}$$

其中 m 为任一质点的质量。这样,从式(16),(22),(23)和(24)可得广义主动力

$$L_1=L_2=2gRm\sin\theta\sin q_2 \tag{25}$$

由式(17),(18),(21),(22)和(23)可得广义惯性力

$$L_1^*=-2mR^2(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2) \tag{26}$$

$$L_2^*=-2mR^2(\ddot{q}_1+2\ddot{q}_2) \tag{27}$$

由式(25)和(26)代入(15)得

$$\ddot{q}_1+\ddot{q}_2=\frac{g}{R}\sin\theta\sin q_2 \tag{28}$$

将式(25)和(27)代入(15)得

$$\ddot{q}_1+2\ddot{q}_2=\frac{g}{R}\sin\theta\sin q_2 \tag{29}$$

式(28)和(29)即为系统的运动微分方程。

例 2 研究如图 1 所示含有刚体的系统。

用类似推导式(12)的方法可求得系统中第 i 个刚体的角加速度

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{r=1}^{p}\boldsymbol{\alpha}_{ir}\ddot{q}_r+\boldsymbol{k}_i \tag{30}$$

其中:$\boldsymbol{\alpha}_{ir}$为偏角加速度;$\boldsymbol{k}_i$ 为 $q_r,\dot{q}_r(r=1,2,\cdots,p)$的函数。由式(30)有

$$\boldsymbol{\alpha}_{ir}=\partial\boldsymbol{\alpha}_i/\partial\ddot{q}_r\qquad(r=1,2,\cdots,p) \tag{31}$$

第 i 个广义主动力 L_{ir}变成

$$L_{ir}=\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{a}_{ir}+\boldsymbol{T}_i\cdot\boldsymbol{\alpha}_{ir} \tag{32}$$

其中 $\boldsymbol{F}_i,\boldsymbol{T}_i$ 分别是作用在第 i 个刚体上的力与力偶,而第 i 个广义惯性力变成

$$L_{ir}^*=\boldsymbol{F}_i^*\cdot\boldsymbol{a}_{ir}^C+\boldsymbol{T}_i^*\cdot\boldsymbol{\alpha}_{ir} \tag{33}$$

其中 $\boldsymbol{a}_{ir}^C$为第 i 个刚体质心 C 的偏加速度,而 $\boldsymbol{F}_i^*,\boldsymbol{T}_i^*$ 分别是刚体的惯性力和惯性力偶。由文献[2]不难得到式(34)和(35)

$$\boldsymbol{F}_i^*=-m_i\boldsymbol{a}_i^C \tag{34}$$

其中:m_i 是第 i 个刚体的质量;$\boldsymbol{a}_i^C$ 是其质心 C 的加速度。而

$$\boldsymbol{T}_i^*=-[J_n\alpha_n+(J_b-J_\tau)\omega_b\omega_\tau]\boldsymbol{n}-[J_\tau\alpha_\tau+(J_b-J_n)\omega_b\omega_n]\boldsymbol{\tau}-[J_b\alpha_b+(J_\tau-J_n)\omega_\tau\omega_n]\boldsymbol{b} \tag{35}$$

其中:$\boldsymbol{n},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{b}$ 是过质心 C 的右手正交坐标;$\omega_n,\omega_\tau,\omega_b$ 与 $\alpha_n,\alpha_\tau,\alpha_b$ 分别是 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{b}$ 上的分量;J_n,J_τ,J_b 分别是对 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{b}$ 的转动惯量。

本例的几何尺寸与例 1 相同,只是 2 个轮的质量均为 m(略去杆及点 P 与 P'的质量)。转动惯量均为

$$J_n=m\rho^2,\ J_\tau=J_b=m\rho^2/2 \tag{36}$$

L_1 与 L_2 仍然由式(25)给出。

据式(17),(33)和(34),可得广义惯性力

$$L_1^*=(-m\boldsymbol{a}_P)\cdot\boldsymbol{a}_{P1}+(-m\boldsymbol{a}_{P'})\cdot\boldsymbol{a}_{P'1}+\boldsymbol{T}_D^*\cdot\boldsymbol{\alpha}_{D1}+\boldsymbol{T}_{D'}^*\cdot\boldsymbol{\alpha}_{D'1} \tag{37}$$

$$L_2^* = (-m\boldsymbol{a}_P)\cdot\boldsymbol{a}_{P2} + (-m\boldsymbol{a}_{P'})\cdot\boldsymbol{a}_{P'2} + \boldsymbol{T}_D^*\cdot\boldsymbol{\alpha}_{D2} + \boldsymbol{T}_{D'}^*\cdot\boldsymbol{\alpha}_{D'2} \tag{38}$$

其中(由式(35)与(36)得)

$$\boldsymbol{T}_D^* = -\frac{m\rho^2}{2}[2\boldsymbol{\alpha}_{Dn}\boldsymbol{n} + (\omega_{Db}\omega_{Dn} + \alpha_{D\tau})\boldsymbol{\tau} - (\omega_{Dn}\omega_{D\tau} - \alpha_{Db})\boldsymbol{b}] \tag{39}$$

$$\boldsymbol{T}_{D'}^* = -\frac{m\rho^2}{2}[2\boldsymbol{\alpha}_{D'n}\boldsymbol{n} + (\omega_{D'b}\omega_{D'n} + \alpha_{D'\tau})\boldsymbol{\tau} - (\omega_{D'n}\omega_{D'\tau} - \alpha_{D'b})\boldsymbol{b}] \tag{40}$$

其中

$$\omega_{Dn} = \dot{q}_1, \omega_{D\tau} = 0, \omega_{Db} = \dot{q}_2, \alpha_{Dn} = \ddot{q}_1, \alpha_{Db} = \ddot{q}_2, \alpha_{D\tau} = \dot{q}_1\dot{q}_2 \tag{41}$$

$$\omega_{D'n} = \dot{q}_3, \omega_{D'\tau} = 0, \omega_{D'b} = \dot{q}_2, \alpha_{D'n} = \ddot{q}_3, \alpha_{D'b} = \ddot{q}_2, \alpha_{D'\tau} = \dot{q}_3\dot{q}_1 \tag{42}$$

因为

$$\boldsymbol{\alpha}_D = \ddot{q}_1\boldsymbol{n} + \ddot{q}_2\boldsymbol{b} + \dot{q}_1\dot{q}_2\boldsymbol{\tau} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{D'} &= \ddot{q}_3\boldsymbol{n} + \ddot{q}_2\boldsymbol{b} + \dot{q}_3\dot{q}_2\boldsymbol{\tau} = (\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2)\boldsymbol{n} + \ddot{q}_2\boldsymbol{b} + (\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2)\dot{q}_2\boldsymbol{\tau} = \\ &\ddot{q}_1\boldsymbol{n} + (2\boldsymbol{n} + \boldsymbol{b})\ddot{q}_2 + (\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2)\dot{q}_2\boldsymbol{\tau}\end{aligned} \tag{44}$$

所以,由式(31),(43)和(44)可得

$$\boldsymbol{\alpha}_{D1} = \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\alpha}_{D2} = \boldsymbol{b} \tag{45}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{D'1} = \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\alpha}_{D'2} = 2\boldsymbol{n} + \boldsymbol{b} \tag{46}$$

由式(37)和(38)可得

$$L_1^* = -2m(R^2 + \rho^2)(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \tag{47}$$

$$L_2^* = -2m(R^2 + \rho^2)(\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2) - m\rho^2\ddot{q}_2 \tag{48}$$

由式(15),(25),(47)和(48)得系统的运动微分方程

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = \frac{gR}{R^2 + \rho^2}\sin\theta\sin q_2$$

$$\ddot{q}_1 + \frac{4R^2 + 5\rho^2}{2(R^2 + \rho^2)}\ddot{q}_2 = \frac{gR}{R^2 + \rho^2}\sin\theta\sin q_2$$

4 结　论

本文给出建立一类非完整系统动力学方程的一般方法,有时它比 Lagrange,Appell,Kane 等方程更为方便。

参考文献

1 Desloge E A. Classical Mechanics (Vol 2). New York: John Wiley & Sons, 1982. 835

2 Landau L D, Lifshitz E M. Mechanics. Oxford: Pergamon Press, 1976. 115