

具有滑移铰约束多体系统的动力分析

李 晶^①

李明瑞^②

(中华人民共和国容奇海关) (中国农业大学工程基础科学部)

摘 要 针对具有滑移铰约束的多体系统对每个物体建立一个牵连坐标系,该坐标系与惯性参考系原点相固连,且与物体坐标系时时平行。物体的刚体平动在牵连系中以相对运动进行度量,而弹性运动仍在物体坐标系中度量。该坐标系充分利用了坐标变换矩阵的正交性,从而实现刚体运动与弹性运动的分解,降低刚弹耦合非线性;同时该坐标系为约束方程的描述以及物体的有限元描述都提供了极大的方便。数值计算结果表明,该方法是解决具有滑移铰约束的多体系统动力分析问题的有效方法。

关键词 滑移铰; 多体系统; 牵连坐标

中图分类号 O 347; TH 113. 22

Dynamic Analysis of Flexible Multibody Systems With Sliding Joints

Li Jing

Li Mingrui

(Rongqi Customs of P. R. C.) (College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Abstract Focussing on the flexible multibody systems with sliding pins, a carrier coordinate system is set up for each body of the system, which is fixed on the origin of the reference coordinate system and always parallel to the body coordinate system. The rigid motion of the body is measured in its carrier coordinate system and the elastic deformation is described in the body coordinate system, so that the orthogonality of the transformation matrix is fully utilized and the nonlinear couplings between rigid motion and elastic deformation are greatly reduced. Further more, it also provides great convenience to describe the constraint equations and the elastic motions. Numerical method is discussed with an example.

Key words sliding joint; multibody system; carrier coordinate system

柔性机械系统,特别是高速度、高精度的平面机械系统的动力学一直是人们研究的重点课题,研究方法也从过去单一的有限元方法^[1~3]过渡到现在的多柔体动力学方法^[4~11]。多体动力学对系统的描述更加准确和有效,但描述的复杂程度也成倍增加,所获得的动力学方程形式复杂,其耦合性、非线性特性、刚性特性以及微分-代数混合特性使得数值求解十分困难;因此,许多学者提出不同的坐标轴理论和坐标缩减技术^[7~11]来获得形式简洁、易于求解的动力学方程。对多体系统而言,坐标系的选取至关重要,它对复杂问题的描述变得较为简洁。

实际的机械系统是千差万别的,约束形式除了圆柱铰约束和平面滑块约束外,滑移铰约束

收稿日期:1997-09-15

①李 晶,广东顺德市容奇镇凤翔南路永乐街2巷2座201室,528303

②李明瑞,北京清华东路17号中国农业大学(东校区)75信箱,100083

也是机械系统常用的约束形式,该种约束可将圆周运动转化为往复运动。在这种约束中,一物体在另一物体的导槽或导杆上滑动,同时带动该物体作定点转动或平面运动。这2个物体共同组成一个铰链约束,而且约束的相对位置也在不断发生变化。具有这种约束的机械系统一般不具有较高的转速,但由于通常具有急回特性,导杆或导槽受到较大的横向力,故弹性变形不容忽视。

在以往的研究中,所建立的坐标系统,无论是参考坐标、铰点相对坐标还是切线坐标,对描述具有滑移铰约束的多体系统具有一定的困难,主要表现在对约束方程的描述上,因为滑块在导杆或导槽上的位置不断改变,难于在绝对坐标系中描述。本文采用的牵连坐标系较好地解决了这一问题。针对约束的特点,灵活使用绝对描述或相对描述,获得了形式简单的约束方程,从而可为数值求解奠定良好基础。

本文中,滑块和导杆均作为单独的物体,滑块可认为是不变形的刚体,而导杆则视为弹性体。在有限元描述中,对导杆进行固定的有限元剖分,滑块在导杆上的不同位置对导杆施加横向力,可认为导杆受到一个作用点位置及大小不断变化的外力作用。在确定外力的位置时,采用一维搜索以确定外力所作用的单元及该单元各节点的位置,而后将作用力等效到各节点上形成节点广义外力。这种方法无论从理论上还是实际上都是正确和可行的。

1 坐标系和运动学

描述一个多体系统的传统的坐标系统对滑移铰约束或平面滑块约束的描述较为困难。笔者建立的如图1所示的坐标轴系统,由惯性参考坐标系 $Oxyz$ 、牵连坐标系 $O^i x_1^i y_1^i z_1^i$ 、物体坐标系 $O^j x^j y^j z^j$ 和单元坐标系 $O^{jj} x^{jj} y^{jj} z^{jj}$ 组成,其中牵连坐标系与物体坐标系时时平行,物体的刚体运动在 $O^i x_1^i y_1^i z_1^i$ 中描述,弹性运动在物体坐标系中描述。弹性体上一点 P^j 在牵连坐标系中的位置为该物体坐标系原点在牵连系中的位置与该点在物体系中位置的线性叠加,可表示为

$$R_{P_1}^j = R_{O_1}^i + P^j \tag{1}$$

式中: $R_{O_1}^i$ 为物体系原点在牵连系中的位置向量; P^j 为该点在物体系中的位置向量,可表示为

$$P^j = u_0^j + u^j \tag{2}$$

式中 u_0^j 和 u^j 分别是点 P 变形前的位置向量和变形向量。采用有限元方法描述点 P 的弹性变形,有

$$u^j = N^j U^j \tag{3}$$

式中: N^j 为单元形函数; U^j 为点 P 所在单元的节点位移向量。

将式(2)和(3)代入(1)得

$$R_{P_1}^j = R_{O_1}^i + u_0^j + N^j U^j$$

于是点 P 在惯性系中的位置向量为

$$R_P^i = A^i R_{P_1}^j = A^i (R_{O_1}^i + u_0^j + N^j U^j) \tag{4}$$

式中 A^i 为坐标变换矩阵,对二维问题有

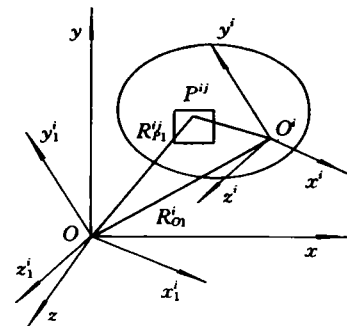


图1 弹性体坐标轴系统

$$A^i = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

对于三维问题,每个物体除了存在 3 个平动自由度外,另有 3 个转动自由度,通常以欧拉参数或欧拉角表示。当采用欧拉参数时,有

$$A^i = \begin{bmatrix} 2(\theta_0^2 + \theta_1^2) - 1 & 2(\theta_1\theta_2 - \theta_0\theta_3) & 2(\theta_1\theta_3 + \theta_0\theta_2) \\ 2(\theta_1\theta_2 + \theta_0\theta_3) & 2(\theta_0^2 + \theta_2^2) - 1 & 2(\theta_2\theta_3 - \theta_0\theta_1) \\ 2(\theta_1\theta_3 - \theta_0\theta_2) & 2(\theta_2\theta_3 + \theta_0\theta_1) & 2(\theta_0^2 + \theta_3^2) - 1 \end{bmatrix}$$

式中 $\theta_0 = \cos(\theta/2)$, $\bar{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3] = \bar{V}\sin(\theta/2)$ (5)

式中: \bar{V} 为空间轴的单位向量; θ 为物体绕该轴转过的角度。式(5)中的 4 个欧拉参数还应满足

$$\sum_{k=0}^3 \theta_k^2 = 1$$

为获得该点在惯性系中的速度,将式(4)对时间求得

$$\dot{R}_p^i = \dot{A}^i R_{p1}^i + A^i (\dot{R}_{01}^i + N^{ij} \dot{U}^{ij}) \quad (6)$$

这样便获得物体上任意点在惯性系中的速度关系,这是推导动力学方程的基础。

2 多体动力学方程

为利用拉格朗日方程建立多体系统的动力方程,首先必须获得物体的动能和势能,为此将式(6)展开得

$$\dot{R}_p^i = B^{ij} \dot{\theta}^i + A^i \dot{R}_{01}^i + A N^{ij} \dot{U}^{ij} = [A^i, B^{ij}, A^i N^{ij}] [\dot{R}_{01}^{iT}, \dot{\theta}^{iT}, \dot{U}^{ijT}]^T$$

式中 $B^{ij} = (\partial A^i / \partial \theta^j) R_{p1}^i$ 。如果物体被划分成 n 个单元,则整个物体的动能可表示成

$$T^i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left(\int_{V^{ij}} \rho^{ij} \dot{R}_p^{iT} \dot{R}_p^{ij} dV^{ij} \right) \quad (7)$$

式中: ρ^{ij} 为单元密度; V^{ij} 为单元体积。式(7)可写成

$$T^i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \dot{q}^{iT} M^{ij} \dot{q}^{ij} \right) = \frac{1}{2} \dot{q}^{iT} M^{ij} \dot{q}^i \quad (8)$$

式中 $q^i = [R^{iT}, \theta^{iT}, U^{ijT}]^T$ 为 i 物体作刚体平动、刚体转动及弹性运动的广义坐标的组集。 M^{ij} 可表示为

$$M^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \begin{bmatrix} A^{iT} A^i & A^{iT} B^{ij} & A^{iT} A^i N^{ij} \\ & B^{ijT} B^{ij} & B^{ijT} A^i N^{ij} \\ \text{对称} & & N^{ijT} A^{iT} A^i N^{ij} \end{bmatrix} dV^{ij}$$

对于二维变换矩阵,根据其正交性,可知

$$A^{iT} A^i = A_\theta^{iT} A_\theta^i = I_2, A_\theta^{iT} A^i = \bar{I}_2$$

其中 \bar{I}_2 为反对称单位阵,于是 M^{ij} 写成

$$M^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} \begin{bmatrix} I_2 & \bar{I}_2 R_{p1}^{ij} & N^{ij} \\ & R_{p1}^{ijT} R_{p1}^{ij} & \bar{I}_2 N^{ij} \\ \text{对称} & & N^{ijT} N^{ij} \end{bmatrix} dV^{ij} = \begin{bmatrix} M_{RR} & M_{R\theta} & M_{Ru} \\ & M_{\theta\theta} & M_{\theta u} \\ \text{对称} & & M_{uu} \end{bmatrix}^{ij} \quad (9)$$

从式(9)可以看出, M_{Ru} 已被线性化,这对物体的弹性有限元分析是有利的。对三维问题单元质

量阵的推导请参阅文献[7],可同样得到线性化的 M_{Rn} ,这里不再复述。物体的弹性势能只与物体的弹性变形有关,而与物体的位置无关。对于一个确定的物体坐标系,弹性势能有唯一的形式

$$\Pi^i = \sum_{j=1}^n \Pi^{ij} = \frac{1}{2} U^{iT} K^i U^i \quad (10)$$

其中: U^i 为物体有限元节点广义坐标的组集; K^i 为各单元刚度矩阵组集而成的物体刚度矩阵。式(11)也可写成

$$\Pi^i = \frac{1}{2} q^{iT} \bar{K}^i q^i \quad (11)$$

\bar{K}^i 具有如下形式

$$\bar{K}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K^i \end{bmatrix}$$

在本文的推导中,物体的平动在平行于物体坐标系的牵连系中度量,但整个物体的动能和势能仍然在惯性系中度量;因此对动能和势能的表述是全面的。将式(8)和(11)代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T^i}{\partial q^i} + \frac{\partial \Pi^i}{\partial q^i} + C_q^{iT} \lambda = Q^i$$

式中 C_q^i 为 i 物体的约束雅克比阵, λ 为约束乘子, Q^i 为 i 物体的广义力向量,于是动力学方程可写为

$$M^i \ddot{q}^i + \bar{K} q^i + C_q^{iT} \lambda = Q^i + \frac{\partial T^i}{\partial q^i} - \dot{M} \dot{q}^i \quad i=1,2,\dots,l \quad (12)$$

式中: \dot{M} 为质量阵对时间的导数阵, $\frac{\partial T^i}{\partial q^i} - \dot{M} \dot{q}^i$ 称为速度二次项,是一个不可忽略的部分, l 为系统中物体的个数。

在约束机械系统中,描述各物体的广义坐标并不完全独立,它们之间必须满足一定的约束关系,该约束关系可用一组非线性代数方程表示

$$C_1(q,t) = 0 \quad (13)$$

除此之外,系统还可能受有非完整约束,表示为

$$C_2(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (14)$$

式(12),(13)和(14)即构成了具有完整与非完整约束柔性多体系统的动力学方程。

3 滑移铰约束的约束方程

图 2(a)所示为一滑移铰约束,物体 i 在物体 j 上作光滑无摩擦滑动,同时带动 j 作平面运动,两物体共同构成一对铰链约束。当 j 为一光滑直杆且不考虑弹性变形时,两物体的物体坐标系方向相同,其各自的牵连坐标系重合。于是在牵连坐标系内,容易获得两物体的约束关系,即两物体的转角时时相等,其物体坐标系原点在各自牵连系中的 y 向分量也时时相等。写成数学形式为

$$\theta = \theta^i \quad (15a)$$

$$y'_{01} = y'_{01} \quad (15b)$$

此约束方程形式非常简单,且为线性方程,这正是所希望获得的。当考虑导杆的弹性变形时,情况略微复杂。如图 2(b)所示,滑块和导杆接触点处产生挠度和转角,使两物体的物体坐标系不再平行,牵连坐标系也不能重合,倾角即为滑块与导杆接触点处导杆的弹性转角。令接触点的弹性转角为 θ^k ,考虑滑块的方向应为接触点的切线方向,转角关系应满足

$$\theta' = \theta' + \theta^k \quad (16)$$

式(16)为考虑导杆弹性转角的角度约束关系。由于每个约束限制 2 个自由度,因此必须找到另一个约束方程。根据约束性质发现该约束在 x 方向不产生约束,所以应为 y 向约束。为了在同一个坐标系下确定其 y 向分量,将滑块原点放在导杆牵连坐标系中度量,转换关系为

$$\begin{bmatrix} \cos\theta^k & -\sin\theta^k \\ \sin\theta^k & \cos\theta^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{01} \\ y'_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中 x'_i, y'_i 为点 O_i 在 $Ox'_iy'_i$ 中的位置向量。将式(17)展开得到 y 方向分量的关系为 $y'_i = x'_{01} \cdot \sin\theta^k + y'_{01} \cos\theta^k$; 导杆上与滑块原点重合点在其牵连系中的 y 向分量为 $y'_{01} = y'_{01} + u_y^k + u_{0y}^k = y'_{01} + u_y^k + N_y^k U^k$ 。式中: N_y^k 为 j 物体 k 单元 y 向形函数; U^k 为单元节点位移向量; u_{0y}^k 为该接触点变形前在物体坐标系中的位置向量的 y 向分量。由于接触点在 j 物体牵连系中的 y 向分量相等,固有 $y'_i = y'_{01}$, 即

$$N_y^k U^k + u_{0y}^k + y'_{01} = x'_{01} \sin\theta^k + y'_{01} \cos\theta^k \quad (18)$$

式(16)和(18)即为考虑导杆弹性变形时在牵连坐标系中的约束关系,如果忽略弹性变形的影响并考虑导杆为直杆,即可得到线性表达式(15b)。

当精度要求较高时,弹性转角和横向挠度是不可忽略的量;另外,由于物体的坐标系原点在各自的牵连系中描述,其坐标变化的幅度难以预先估计;因此式(16)和(18)对约束的描述更为精确。

根据前面的推导,不难得到圆柱铰约束和平面滑块约束的约束方程,这里不再复述。

4 数值求解

4.1 求解方法

采用牵连坐标系所建立的动力学方程和约束方程虽然在形式上较为简洁,但数值求解仍然困难,主要问题在于方程的微分-代数混合非线性特性和刚性特性,因此,必须采用有效的求解方法。在研究中发现,采用约束方程的加速度形式与动力方程联立的办法求解往往产生数值发散,使数值过程难以进行,这是由于加速度约束经 2 次积分,产生对坐标约束方程的违约。笔者直接采用坐标约束方程与动力方程联立求解的方法,先用纽马克法对动力方程在 $t + \Delta t$ 时刻积分,并以广义坐标增量作为求解向量,得到

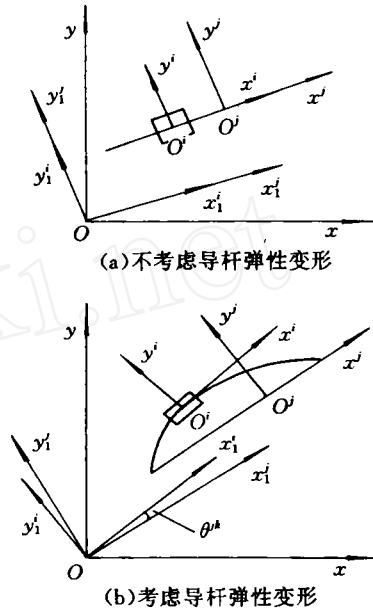


图 2 滑块与导杆构成的铰链约束

$$\tilde{\mathbf{K}}_{t+\Delta t} \Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \tilde{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t} \quad (19)$$

对于约束方程,无论是完整约束还是非完整约束均可通过一定的数学方法将其转变成增量形式的代数方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^h \\ \mathbf{C}^{nh} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (20)$$

通过联立式(19)和(20)求解,便可得到 $t+\Delta t$ 时刻广义坐标的增量,再将广义坐标增量代回纽马克积分格式,便获得 $t+\Delta t$ 时刻的广义速度和加速度。由于方程的非线性特性,需使用迭代格式,直到满足精度要求为止。在这里,积分步长的选取也至关重要,因为步长太小,所耗费的机时增加,太大又不能很好地反映弹性运动;所以在选择步长时应兼顾二者,尽量避开方程刚性特性的影响。应当指出,合理选择积分格式和求解方法是求解多体动力学方程的关键。

4.2 数值算例

图3为一具有滑移铰约束的机械系统,由曲柄 O_1A , 滑块 D , 摇杆 O_2B , 连杆 BC 和平面滑块 E 组成。其中曲柄 O_1A 绕点 O_1 转动,滑块 D 与曲柄以圆柱铰相连,它与曲柄一起转动的同时,自身也绕铰点 A 转动,从而带动 O_2B 作往复运动。本例中, $O_1A = 0.15 \text{ m}$, $O_2B = 0.6 \text{ m}$, $BC = 0.5 \text{ m}$; 各杆直径均为 0.012 m ; $h_1 = h_2 = 0.3 \text{ m}$; 弹性模量为 200 GPa ; 密度为 $7.8 \text{ t} \cdot \text{m}^{-3}$; 滑块 D 和 E 的质量分别为 0.2 kg 及 0.5 kg ; 曲柄角速度为 $20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 。将摇杆模拟为简支梁,分成 10 个单元,积分步长 0.005, 得到导杆横向挠度与曲柄转角的关系,如图4(a)所示。可以看出,在曲柄转动的一个周期内,导杆弹性变形具有较大的跳跃,反映该系统运动的急回特性。将曲柄角速度提升到 $30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 时,得到导杆的横向挠度曲线如图4(b)所示。角速度提高 $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 导杆挠度提高较大,也说明这种系统对速度非常敏感;因此,在结构设计时,应预先对导杆的弹性变形有很好的了解,以便对结构进行优化设计。

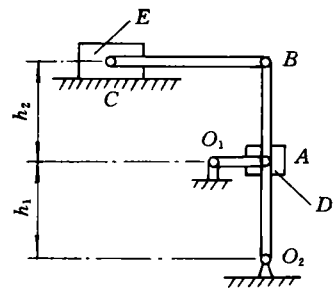


图3 滑移铰约束机械系统

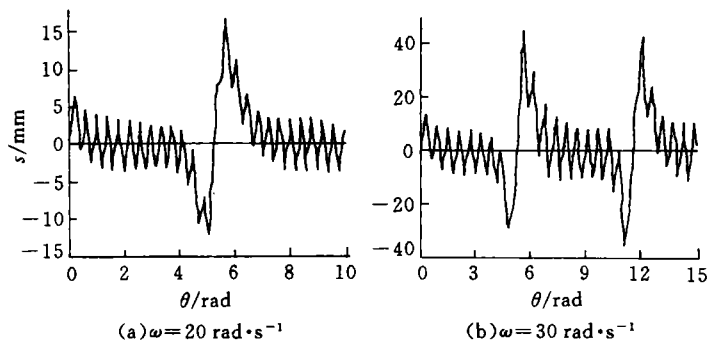


图4 导杆横向挠度 s 与曲柄转角 θ 的关系

5 结束语

文中重点讨论了具有滑移铰约束的多体系统。在传统坐标轴理论上,引入牵连坐标系,采用相对运动描述刚体平动,消除刚弹耦合非线性特性,使动力方程较为简洁;同时,该坐标系为描述约束方程提供了极大的方便,从而为数值求解提供了良好的基础。在对导杆进行有限元计算时,先对导杆作单元剖分,而后确定滑移铰约束力所在单元及距单元节点的距离,将

约束力作为广义外力等效到单元节点上,这样只需对导杆作一次有限元剖分;在确定外力所在单元时,采用一维搜索方法,根据约束点的位置对单元进行逐个比较,对于计算机来说,这是一个瞬间即可完成的运算。采用上述理论对具有滑移铰约束的多体系统进行了数值计算,效果令人十分满意。

参 考 文 献

- 1 Midha A, Erdman A G, Frohrib D A. Finite element approach to mathematical modeling of high-speed elastic linkages. *Mechanism and Machine Theory*, 1978, 13: 603~618
- 2 Cleghorn W L, Fenton R G, Tabarrok B. Finite element analysis of high-speed flexible mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 1981, 16: 407~424
- 3 Turcic D A, Modha A. Generalized equations of motion for the dynamic analysis of elastic mechanism system. *ASME J of Dynamic System, Measurement and Control*, 1984, 106: 243~258
- 4 Shabana A A. Automated analysis of constrained system of rigid and flexible bodies. *J of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1985, 107: 431~439
- 5 Khulef Y A, Shabana A A. Dynamics of multibody systems with variable kinematic structure. *ASME J of Mech, Trans and Autom in Design*, 1986, 108(2): 153~175
- 6 刘尔铎,李 晶,李惠珍. 内燃机配气机构动力分析的多柔体动力学模型. *汽车工程*, 1991(4): 249~255
- 7 李 晶,李明瑞,黄文彬. 刚柔耦合约束多体系统的动力分析. *力学学报*, 1994, 26(3): 333~340
- 8 Pereria M S, Procenca P L. Dynamic analysis of flexible multibody systems using joint coordinates. *Intern J for Numer Methods in Engi*, 1991, 32: 1799~1812
- 9 Changizi K, Shabana A A. A recursive formulation for the dynamic analysis of open loop deformable multibody systems. *J of applied mechanics*, 1988, 55: 687~693
- 10 Agrawal O P, Saigal S. Dynamic analysis of flexible multibody systems using tangent coordinates. *Computers and Structures*, 1989, 31(3): 349~355
- 11 Chadha B, Agrawal O P. Dynamic analysis of flexible multibody systems using mixed model and tangent coordinates. *Computers and Structures*, 1989, 31(6): 1041~1050