

库仑摩擦接触问题的位移-力混合接触单元

曾 丁^①

黄文彬^② 华云龙

(交通部水运科学研究所) (中国农业大学工程基础科学部)

摘 要 针对 Coulomb 摩擦接触问题的位移-力混合接触单元,为了防止接触面嵌入量太大,对于粘接状态在修正接触边界法向位移的同时,提出了一种修正切向位移的方法;为了利用 FEM 软件包的求解器,将接触单元滑动接触状态的单元刚度矩阵作了对称化处理,从而达到整个问题的总刚对称,这就很好地解决了有间隙接触问题。实例验证结果表明,所提出的方法是有效、可行的。

关键词 Coulomb 摩擦; 接触单元; 有限元法

中图分类号 O 343.3

A Mixed Element of Displacement and Force of Coulomb Friction Contact

Zeng Ding

Huang Wenbin Hua Yunlong

(Waterborne Transportation Institute,MC) (College of Applied Engineering Sciences,CAU)

Abstract The amending tangential displacement method is put forward toward the amending normal displacement of stick contact to prevent the inset on the surface of a mixed element of displacement and force of Coulomb friction contact. The element stiffness matrix of sliding contact is symmetrized by using FEM resolver to get an entire symmetrization.

Key words Coulomb friction; contact element; finite element method

接触问题是工程上经常遇到的问题,也是较难解决的问题之一。笔者在前人研究的基础上采用位移-力有限元混合法,建立了一个完全的 Coulomb 摩擦接触问题的接触单元,把它作为两接触物之间的界面单元。在位移和力的处理上不同于现有文献:文献[1]和[2]引入了刚体位移和物体系的刚体平衡方程,文献[3]和[4]将位移向量和接触面上的接触力向量作了分解处理;而本文直接建立接触单元,通过接触边界位移反弹修正接触边界,达到两接触物体接触边界几何形状协调,利用单元刚度矩阵对称化使总刚对称,大量地减少了计算机的内存占用量,可以使用各种解系数矩阵对称的代数方程组方法,从而达到解决大型问题、提高计算机效率的目的。实例验证表明,所提出的方法是有效、可行的。

1 二维库仑摩擦接触问题的描述

令二维库仑摩擦接触问题的物体系由 2 个物体 $\Omega^{(\alpha)}$ ($\alpha=1,2$) 组成,物体的边界由力边界 $S_i^{(\alpha)}$ 、位移边界 $S_u^{(\alpha)}$ 和接触边界 $S_c^{(\alpha)}$ 等 3 部分组成,如图 1 所示。总的接触边界以 S_c 表示,且

收稿日期:1997-10-28

①曾 丁,北京西土城路 8 号 交通部水运科学研究所,100088

②黄文彬,北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区)75 信箱,100083

$S_c = S_c^{(1)} + S_c^{(2)}$, 接触点 Q_c 位于接触边界 $S_c^{(\alpha)}$ 上。假定: 1) 此问题为小变形问题; 2) 接触边界分片光滑; 3) 认为在物系的变形过程中, 点 Q_1 和 Q_2 始终构成一对不变的接触点对。图 1 中: 在局部坐标系 $(\tau-n)$ 内, 物体 $\Omega^{(2)}$ 相对物体 $\Omega^{(1)}$ 永远位于 n 轴的正方向一侧; 接触边界 $S_c^{(\alpha)}$ 上点 Q_c 的切向位移用 $u_c (\alpha=1, 2)$ 表示, 法向位移以 $v_c (\alpha=1, 2)$ 表示, 则接触边界 $S_c^{(1)}$ 与 $S_c^{(2)}$ 在由点 Q_1 与 Q_2 构成的接触点对处的法向间隙为 $\Delta v = v_2 - v_1 + \delta_n$, 其中 δ_n 为初始法向间隙, 理论上要求 $\Delta v \geq 0$ 。

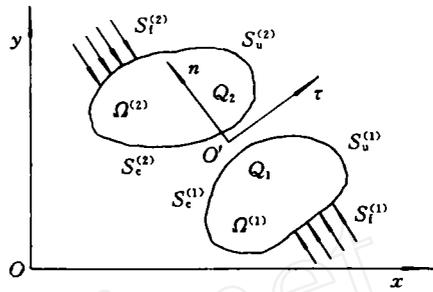


图 1 二维库仑摩擦接触问题示意图

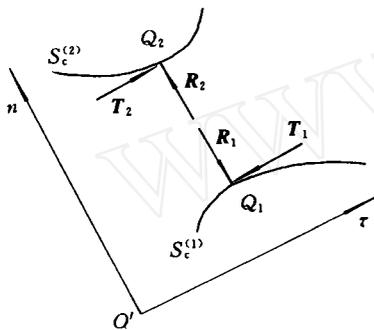


图 2 接触力示意图

令接触边界 $S_c^{(\alpha)}$ 上的点 Q_c 受到的接触反力为: 切向反力 T_c , 法向反力 R_c , 在局部坐标系 $(\tau-n)$ 内, 假设力的方向如图 2 所示; 再令接触边界 $S_c^{(1)}$ 与 $S_c^{(2)}$ 之间的接触力为: 切向接触力 T , 法向接触力 R , 且有如下代数关系: $T = -T_1 = T_2, R = -R_1 = R_2$, 而且要求 $R \geq 0$ 。

2 构造接触单元

如图 3 所示, 通过位于接触边界 $S_c^{(1)}$ 上的点 Q_1 和位于接触边界 $S_c^{(2)}$ 上的点 Q_2 构成的接触点对, 构造位移-力混合型接触单元。单元由 3 个节点组成, 定义 Q_1 为单元的 I 号节点, Q_2 为单元的 III 号节点, 在局部坐标系 $(\tau-n)$ 内, I 号节点的位移用 (u_1, v_1) 表示, III 号节点的位移以 (u_2, v_2) 表示; II 号节点为虚拟节点, 其他节点以位移为基本未知量, 而该节点以接触力 (T, R) 为基本未知量, 在有限元网格剖分时理论上 II 号节点的坐标可以任意给定, 本文中利用该点形成局部坐标系。

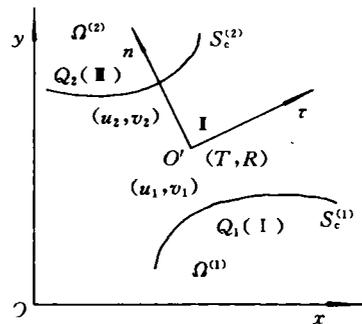


图 3 接触单元示意图

3 接触状态及其单元平衡

3.1 分离状态

理论上当法向间隙

$$\Delta v_{(m)}^{(i-1)} = v_{2(m)}^{(i-1)} - v_{1(m)}^{(i-1)} + \delta_n > 0$$

时 (数值模拟计算中取 $\Delta v_{(m)}^{(i-1)} > \epsilon_1, \epsilon_1$ 为非常小的正数), 接触点对处于分离状态。其中: 下标 m 表示第 m 加载步; 上标 $i-1$ 表示第 m 加载步的第 $i-1$ 次迭代。

此时, 第 i 次迭代按分离状态进行, 由定解条件得接触单元的位移增量、力增量及右端项, 用矩阵关系表示如下:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_{1(m)}^{(i)} \\ \Delta v_{1(m)}^{(i)} \\ \Delta T_{(m)}^{(i)}/e \\ \Delta R_{(m)}^{(i)}/e \\ \Delta u_{2(m)}^{(i)} \\ \Delta v_{2(m)}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -T_{(m)}^{(i-1)} \\ -R_{(m)}^{(i-1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_{j(m)}^{(i)} &= u_{j(m)}^{(i)} - u_{j(m)}^{(i-1)} \\ \Delta v_{j(m)}^{(i)} &= v_{j(m)}^{(i)} - v_{j(m)}^{(i-1)} \end{aligned} \right\} \quad (j=1, 2)$$

式(1)也可以简写为 $[k_c]\{\Delta u_c\} = \{p_c\}$ 。其中式(1)中的 $e > 0$ ，是为了消除总刚度矩阵的病态，使接触单元的单刚矩阵中的元素量级与接触物单刚元素量级相匹配而选取的参数。

理论上当 $\Delta v_{(m)}^{(i-1)} = v_{2(m)}^{(i-1)} - v_{1(m)}^{(i-1)} + \delta_n = 0$ (数值模拟中 $\Delta v_{(m)}^{(i-1)} \leq \epsilon_1$) 时，第 i 次迭代转入粘接状态。

3.2 粘接状态

理论上当 $\Delta v_{(m)}^{(i-1)} = v_{2(m)}^{(i-1)} - v_{1(m)}^{(i-1)} + \delta_n = 0$ (数值模拟中 $\Delta v_{(m)}^{(i-1)} \leq \epsilon_1$)， $R_{(m)}^{(i-1)} > 0$ (数值模拟中 $R_{(m)}^{(i-1)} > \epsilon_2$ ，其中 ϵ_2 为一个非常小的正数)， $|T_{(m)}^{(i-1)}| \leq \mu |R_{(m)}^{(i-1)}|$ 时，第 i 次迭代进入粘接状态，定解条件用矩阵关系表示如下：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & -e & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & -e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_{1(m)}^{(i)} \\ \Delta v_{1(m)}^{(i)} \\ \Delta T_{(m)}^{(i)}/e \\ \Delta R_{(m)}^{(i)}/e \\ \Delta u_{2(m)}^{(i)} \\ \Delta v_{2(m)}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{1(m)}^{(i-1)} \\ R_{1(m)}^{(i-1)} \\ \Delta t \\ \Delta n \\ T_{2(m)}^{(i-1)} \\ R_{2(m)}^{(i-1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -T_{(m)}^{(i-1)} \\ -R_{(m)}^{(i-1)} \\ \Delta t \\ \Delta n \\ T_{(m)}^{(i-1)} \\ R_{(m)}^{(i-1)} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

其中 $\Delta n = \Delta v_{(m)}^{(i-1)}$ ；

当 $0 \leq \Delta v_{(m)}^{(i-1)} \leq \epsilon_1$ 时

$$\Delta t = 0$$

当 $\Delta v_{(m)}^{(i-1)} < 0$ 时

$$\Delta t = \Delta v_{(m)}^{(i-1)} (\Delta v_{2(m)}^{(i-1)} - \Delta v_{1(m)}^{(i-1)})^{-1} (\Delta u_{2(m)}^{(i-1)} - \Delta u_{1(m)}^{(i-1)})$$

在式(2)中 Δn 与 Δt 的作用就是使接触面位移反弹，让两物体在接触边界上无相互嵌入现象，在切线方向也位于适当的位置。其中 Δt 是对接触边界切向位移的修正。

理论上当 $\Delta v_{(m)}^{(i-1)} = v_{2(m)}^{(i-1)} - v_{1(m)}^{(i-1)} + \delta_n = 0$ (数值模拟中 $\Delta v_{(m)}^{(i-1)} \leq \epsilon_1$)，或 $R_{(m)}^{(i-1)} > 0$ (数值模拟中 $R_{(m)}^{(i-1)} > \epsilon_2$) 不成立时，第 i 次迭代转入分离状态。

当 $|T_{(m)}^{(i-1)}| \leq \mu |R_{(m)}^{(i-1)}|$ 不成立时，第 i 次迭代转入滑动状态。

3.3 滑动状态

理论上当 $\Delta v_{(m)}^{(i-1)} = v_{2(m)}^{(i-1)} - v_{1(m)}^{(i-1)} + \delta_n = 0$ (数值模拟中 $\Delta v_{(m)}^{(i-1)} \leq \epsilon_1$)， $R_{(m)}^{(i-1)} > 0$ (数值模拟中 $R_{(m)}^{(i-1)} > \epsilon_2$) 和 $|T_{(m)}^{(i-1)}| > \mu |R_{(m)}^{(i-1)}|$ 成立时，第 i 次迭代进入滑动状态，接触单元的定解条件用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & -e\mu S_g & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & -e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{1(m)}^{(i)} \\ \Delta v_{1(m)}^{(i)} \\ \Delta T_{(m)}^{(i)}/e \\ \Delta R_{(m)}^{(i)}/e \\ \Delta u_{2(m)}^{(i)} \\ \Delta v_{2(m)}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{(m)}^{(i-1)} \\ -R_{(m)}^{(i-1)} \\ -T_{(m)}^{(i-1)} + R_{(m)}^{(i-1)}\mu S_g \\ \Delta n \\ T_{(m)}^{(i-1)} \\ R_{(m)}^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中

$$S_g = \begin{cases} \text{sgn}(T_{(m)}^{(i-1)}) & \text{当第 } i-1 \text{ 次迭代为粘接时} \\ \text{sgn}(\Delta u_{(m)}^{(i-1)} - \Delta u_{(m)}^*) & \text{当第 } i-1 \text{ 次迭代为滑动时} \end{cases}$$

$$\Delta u_{(m)}^{(i-1)} = u_{1(m)}^{(i-1)} - u_{2(m)}^{(i-1)}$$

$$\Delta u_{(m)}^* = u_{1(m)}^* - u_{2(m)}^*$$

式中: $u_{1(m)}^*$ 为最近一次由其他状态进入粘接(刚粘上)时, I 号节点(Q_1 点)在局部坐标系内沿 τ 轴的位移; $u_{2(m)}^*$ 为最近一次由其他状态进入粘接(刚粘上)时, II 号节点(Q_2 点)在局部坐标系内沿 τ 轴的位移。

从式(3)可知,滑动状态单元的刚度矩阵是非对称的,在数值模拟计算中,总刚必须全部驻留在计算机的内存中,再者,必须使用高斯消元法解线性方程组。这样就导致大量占用内存,降低了机器的效率,而且使解决问题的规模受到限制,对于微型计算机,这一矛盾更加突出。为了利用 FEM 软件包的求解器,为了提高机器的效率,尽可能地解决大型问题,希望利用现有成熟的解系数矩阵对称的线性方程组的数学方法,这样必须使单刚对称化,而由单刚对称化引入的截断误差,只要迭代解是收敛的,那么此种误差可由迭代计算逐步来修正。

为了使单元刚度矩阵对称,在此将式(3)中的切向力增量 ΔT 省略掉,相应地式(3)中的切向力取为 $T_{(m)}^{*(i)} = S_g \mu R_{(m)}^{(i-1)}$,也就是说取第 $i-1$ 次的迭代结果 $S_g \mu R_{(m)}^{(i-1)}$ 作为第 i 次迭代时切向力的预估值,则在第 i 次迭代时定解条件用矩阵就表示成了如下的形式:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{1(m)}^{(i)} \\ \Delta v_{1(m)}^{(i)} \\ \Delta T_{(m)}^{(i)}/e \\ \Delta R_{(m)}^{(i)}/e \\ \Delta u_{2(m)}^{(i)} \\ \Delta v_{2(m)}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{(m)}^{*(i)} \\ -R_{(m)}^{(i-1)} \\ 0 \\ \Delta n \\ T_{(m)}^{*(i)} \\ R_{(m)}^{(i-1)} \end{bmatrix}$$

达到了单元刚度矩阵的对称化,且修正后的切向力为 $T_{(m)}^{(i)} = \mu R_{(m)}^{(i)} \cdot \text{sgn}(\Delta u_{(m)}^{(i)} - \Delta u_{(m)}^*)$ 。

理论上当 $\Delta v_{(m)}^{(i-1)} = v_{2(m)}^{(i-1)} - v_{1(m)}^{(i-1)} + \delta_n = 0$ (数值模拟中 $\Delta v_{(m)}^{(i-1)} \leq \epsilon_1$), 或 $R_{(m)}^{(i-1)} > 0$ (数值模拟中 $R_{(m)}^{(i-1)} > \epsilon_2$) 不成立时,第 i 次迭代转入分离状态。

当 $\text{sgn}(T_{(m)}^{(i-1)}) = \text{sgn}(T_{(m)}^{*(i-1)})$ 不成立时,第 i 次迭代转入粘接状态。

4 算 例

例 1 在刚性平面上,放置一个半径 $R=8$ cm,弹性模量 $E=19.6$ MPa,泊松比 $\nu=0.3$ 的圆柱体,其顶点铅垂向下作用一个 $F=1.53$ kN 的集中力,设为平面应变问题,见图 4。同文献

[5]和[6]一样,近似地取 1/4 圆柱体进行分析。本文的有限元网格剖分比文献[5]和[6]简单,如图 5 所示,弹性体划分成 64 个四节点等参单元,在接触边界上设置了 8 个接触单元。图 6(a)是无摩擦时本文的接触应力分布曲线与 Hertz 解曲线的比较,图 6(b)是摩擦因数 $\mu=0.4$ 时与文献[6]的接触应力分布曲线的比较,表 1 是无摩擦时本文数值结果与 Hertz 解的比较。

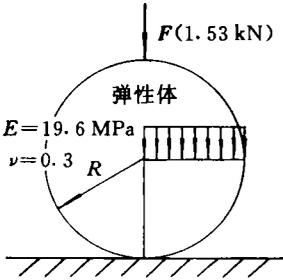


图 4 计算模型

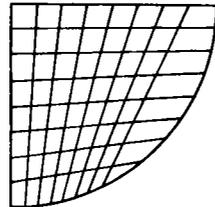


图 5 有限元网格剖分

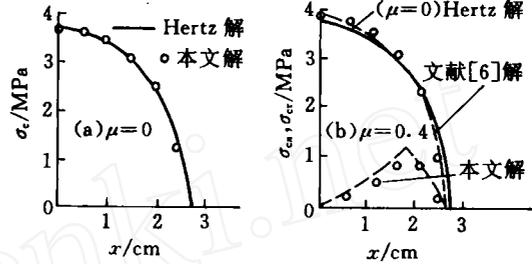


图 6 接触应力分布图

表 1 $\mu=0$ 时本文数值结果与 Hertz 解的比较

MPa

解法	横坐标 x/cm					
	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
Hertz 解	3.622 07	3.557 12	3.360 38	3.003 99	2.418 35	1.328 75
本文解	3.584 92	3.532 50	3.364 60	3.052 77	2.503 60	1.142 08
误差/%	-1.03	-0.69	0.13	1.62	3.53	14.05

说明:由于接触边界的右端点位于区间(2.5,3)之间,在此很难确定具体位置,所以, $x=2.5$ 处的接触应力是用弹性体内高斯点的应力估算的,故误差较大。

例 2 如图 7 所示,该平面冲压问题选自文献[7]。两物体均为理想弹塑性体,服从 Von Mises 屈服准则。弹性模量 $E_1 = E_2 = E = 206 \text{ GPa}$,泊松比 $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.3$,物体 1 的单向屈服应力 $\sigma_{y1} = 1.96 \text{ GPa}$,物体 2 的单向屈服应力 $\sigma_{y2} = 196 \text{ MPa}$ 。

据文献[7]按平面应变问题处理,取最大均布载荷 $p_{\max} = 1.93\sigma_{y2}$ 。数值模拟得:当 p 达到 p_{\max} 时,物体 2 的塑性区域达到物体 1 的底表面,与文献[7]结论相同(文献[7]指出理论值是 $1.96\sigma_{y2}$ ^[10])。图 8 给出了本文与文献[7]的法向接触应力的比较,对于无摩擦和有摩擦 2 种情况,弹性、弹塑性法向接触应力的分布规律与该文献完全一致。不同的是:1)在接触边界的左端,文献[7]是弹性解(应力的值)略微大一点,而本文是弹塑性解稍大一些;2)有摩擦接触中,在最右端,对于接触应力的值,文献[7]是弹性解小于弹塑性解,而本文是弹性解大于弹塑性解。但是,此结果与笔者用另一种接触单元模拟的结果完全一致。因此,笔者认为这些差异是由于方法的不同或是有限元网格剖分不同造成的。

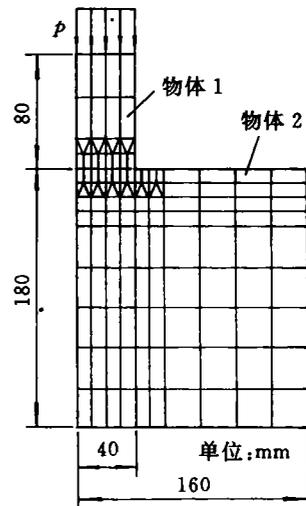


图 7 平面冲压问题示意图

图 9 是 $\mu=0.2$ 时本文的切向接触应力分布图,图 10 是 $\mu=0.2$ 时弹塑性接触状态本文与文献[7]的切向接触应力的比较,该文献指出只有 $x=35 \text{ mm}$ 处的接触点对处于滑动状态,而本文在 $x=30, 35 \text{ mm}$ 两处的接触点对处于滑动状态,笔者认为若有滑动

接触边界一定是某一区段,而不是一点。

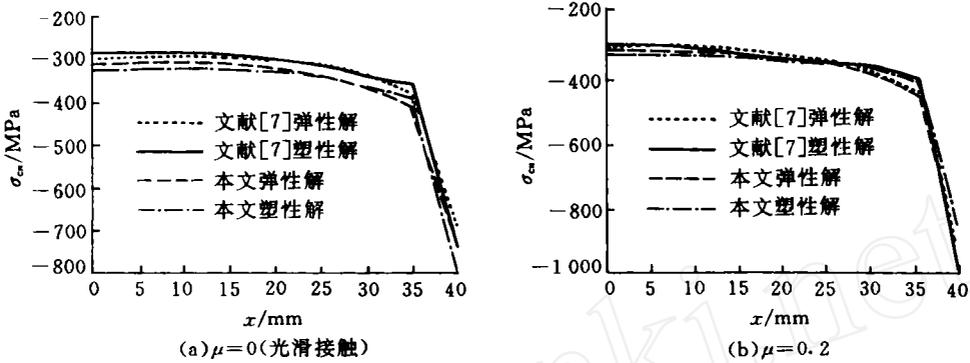


图8 法向接触应力分布

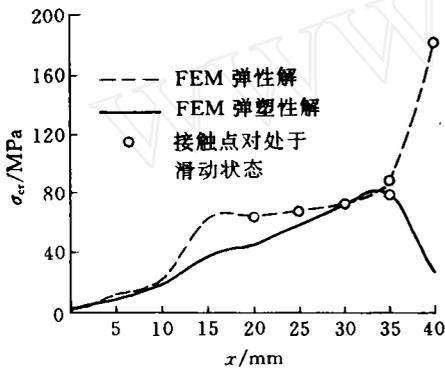


图9 $\mu=0.2$ 时的切向接触应力

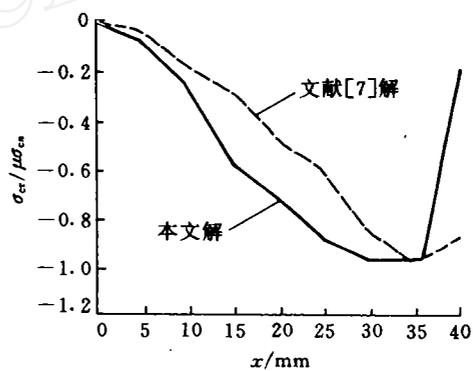


图10 $\mu=0.2$ 时的切向接触应力塑性解比较

参 考 文 献

- 1 刘崇德,黄昌华.用有限元混合法分析多弹性体的相互接触问题.计算结构力学及其应用,1989,6(1):168~176
- 2 李润方,李健,林腾蛟.瞬态耦合热弹塑性接触有限元方法.计算结构力学及其应用,1993,10(3):254~263
- 3 吴厚钰,郑润生,向松,等.接触问题有限元法及其在汽轮机强度设计中的应用.西安交通大学学报,1990,20(5):79~87
- 4 鲁世强,吴厚钰.有摩擦有间隙的三维接触问题有限元法及其应用.应用力学学报,1996,13(2):56~63
- 5 Zhong W X, Sun S M. A parametric quadratic programming approach to elastic contact problems with friction. Comput & struct, 1989,32(1):37~43
- 6 朱昌铭.基于虚功原理的弹性接触问题的线性互补方法.力学学报,1995,27(2):189~197
- 7 Zhu Changming. A finite element-mathematical programming method for elastoplastic contact problems with friction. Finite Element in Analysis and Design,1995(20):273~282