

# 层状粘性土壤水分动态新模型的应用<sup>①</sup>

任 理<sup>②</sup> 李春友 李韵珠  
(土壤和水科学系)

**摘 要** 根据 Moldrup 等提出的运动平均斜率(moving mean slope)模型,对重粘土、轻粘土、粉质粘土和壤土及前 3 种粘性土壤所构成的层状介质中的水分,在入渗条件下的运动进行了数值模拟。结果表明,这种新模型对粘性土壤水分动态的预报较传统有限差分数值模型简捷、快速。

**关键词** 层状土壤;粘性质地;水分动态;模拟;模型

**中图分类号** S152

## Applications of New Model to Simulating the Moisture Variation of Layered Clayey Soils

Ren Li Li Chunyou Li Yunzhu  
(Dept. of Soil and Water Science)

**Abstract** Based on the moving mean slope (MMS) model developed by Moldrup et al. (1989) for simulating water movement in unsaturated soils, the flow of moisture under ponded infiltration in several soils, was computed. The results indicated that the MMS model was a convenient and fast tool for easy and accurate modeling of one-dimensional flow of water in unsaturated soils, especially in simulating water movement in clay soils.

**Key words** layered soil; clayey texture; moisture dynamics; simulation; model

### 1 模型原理和数值误差的控制

在非饱和土壤中,水分运动的达西定律和连续性方程为:

$$V = -K(\theta) \frac{\partial H}{\partial Z} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial Z} \quad (2)$$

式中: $V$  是流速( $\text{cm} \cdot \text{min}^{-1}$ ); $K$  是水力传导度( $\text{cm} \cdot \text{min}^{-1}$ ); $\theta$  是体积含水量( $\text{cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$ ); $H$  是总水势( $\text{cm}$ ); $Z$  是深度坐标( $\text{cm}$ ),向下为正; $t$  是时间( $\text{min}$ )。

由(1),(2)两式,得到非饱和土壤水分垂向流动方程如下:

收稿日期 1996-05-06

①中国博士后科学基金资助

②任理,北京圆明园西路 2 号中国农业大学(西校区),100094

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial Z} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial Z} \quad (3)$$

这里,  $D$  是扩散度 ( $\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-1}$ )。

目前, 求解方程(3)一般采用有限差分法(FDM)和有限单元法(FEM)。若离散方程(3)的时空步长选择恰当, 这两种数值方法都是稳定和精确的。然而, 由于方程所固有的强非线性。在模拟诸如: ①粘性土壤地下水大埋深情况下, 降雨对地下水的补给; ②上边界条件为蒸发和入渗交替进行, 土壤水分的消长过程等实际问题时, 往往耗费大量机时, 致使难以进行水分动态的长期预报。

Wind 和 van Doorne 分别使用方程(1)和(2)提出了一个更快速的逼近式, 其模型基于如下近似:

$$K(\Psi) = K_s e^{\alpha \Psi} \quad (4)$$

这里,  $\Psi$  是基质势 ( $\text{cm}$ ),  $K_s$  是饱和水力传导度 ( $\text{cm} \cdot \text{min}^{-1}$ ),  $\alpha$  是常数 ( $\text{cm}^{-1}$ )。

假定  $\Psi$  是  $Z$  的一个可微函数, 方程(4)对  $Z$  求导且与方程(1)结合, 得<sup>[1]</sup>:

$$\frac{dK}{dZ} + \alpha(V - K) = 0 \quad (5)$$

其解为:

$$V - K = -C e^{\alpha Z} \quad (6)$$

这里  $C$  是常数(一)。

再假定一个时间步长内流速  $V$  在相邻空间节点  $i$  和  $i+1$  之间为常数, 与方程(4)相结合, 使  $Z_i$  与  $K_i$ ,  $Z_{i+1}$  与  $K_{i+1}$  相对应, 则方程(6)转换成

$$V_{i+1/2} = -\frac{K_i e^{\alpha \Psi_{i+1}} - K_i e^{\alpha \Psi_i}}{e^{\alpha \Delta Z} - 1} + K_i e^{\alpha \Psi_i} \quad (7)$$

式中,  $V_{i+1/2}$  是相邻节点  $i$  与  $i+1$  之间网格边界处的流速 ( $\text{cm} \cdot \text{min}^{-1}$ )。

流速  $V$  在一个时间增量内在相邻节点之间为常数的假定会给出不连续问题, 由于  $V$  是在节点之间的网格边界上计算的, 因此导致  $V$  是深度的一个表观光滑曲线 (apparently smooth curve)<sup>[1]</sup>。

Wind 和 van Doorne 模型只能处理均质土壤中相对湿润的流动情况, 这是因为方程(4)只能较好地近似相应于高含水率  $\Psi$  范围内的  $K \sim \Psi$  曲线。

图 1(引自 Moldrup, 等 1989)所示, Richter(1980)通过将  $K \sim \Psi$  曲线用许多指数函数近似而将模型推广到处理相对干燥的土壤。他使用下列方程来计算流速:

$$V_{i+1/2} = -\frac{K_N e^{\alpha_N \Psi_{i+1}} - K_N e^{\alpha_N \Psi_i}}{e^{\alpha_N \Delta Z} - 1} + K_N e^{\alpha_N \Psi_i} \quad (8)$$

这里,  $K_N$ ,  $\alpha_N$  均为常数, 单位分别为  $\text{cm} \cdot \text{min}^{-1}$  和  $\text{cm}^{-1}$ 。

Moldrup 等(1989)发展了在一个围绕真实  $\Psi$  值小范围内两个相邻节点的每一点处近似  $K \sim \Psi$  曲线的局部指数近似式。他们假定在围绕相邻节点  $i$  和  $i+1$  长度为  $X$  的一个小的  $\Psi$  范围中  $K$  能表成<sup>[1]</sup>:

$$K(\Psi) = K_L e^{\alpha_L \Psi} \quad (9)$$

同样  $K_L$  和  $\alpha_L$  均为常数, 单位同前。在  $\ln K \sim \Psi$  坐标系统中,  $K_L$  是  $K \sim \Psi$  曲线与  $K$  轴间的截距,  $\alpha_L$  是斜率。

在节点  $i$  处的  $\alpha_i$  和  $K_i$  的局部值可根据如下方程来估计<sup>[1]</sup>：

$$\alpha_{L,i} = \frac{\ln[K(\Psi_i + X/2)] - \ln[K(\Psi_i - X/2)]}{X} \tag{10}$$

$$K_{L,i} = K(\Psi_i)e^{-\alpha_{L,i}\Psi_i} \tag{11}$$

这里,  $X$  的取值范围是(Moldrup 等,1989):  $0.2 \text{ cm} < X < 3 \text{ cm}$  。

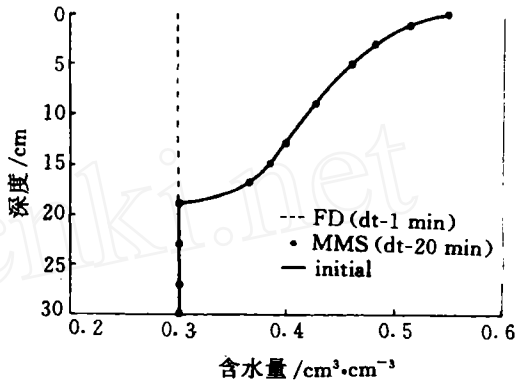
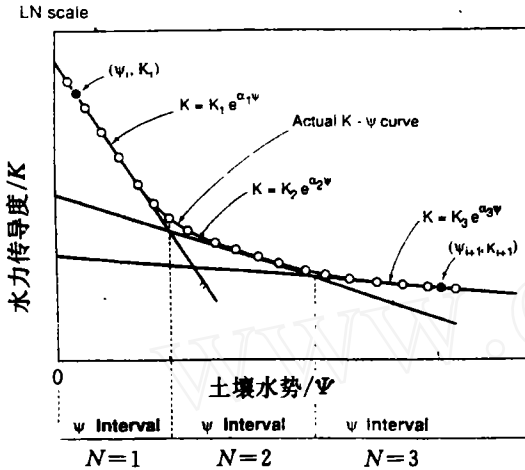


图 1 许多指数函数对  $K \sim \Psi$  曲线的近似  
每一个函数在各自的范围内都有效

图 2 较低初始含水率下重粘土水分动态  
( $t = 96 \text{ h}$ )

相邻节点  $i$  和  $i+1$  之间的计算,使用  $\alpha_N$  和  $K_N$ 简单的局部节点平均值<sup>[1]</sup>：

$$\alpha_N = \frac{\alpha_{L,i} + \alpha_{L,i+1}}{2} \tag{12}$$

$$K_N = \frac{K_{L,i} + K_{L,i+1}}{2} \tag{13}$$

由此,  $K \sim \Psi$  曲线的局部斜率平均值用于估计  $\alpha_N$  值,该值用来计算流速。这个平均值在非稳定流期间总是有点儿变化,故该模型称为“运动平均斜率”模型(MMS 模型)<sup>[1]</sup>。

使用连续方程的简单显式差分近似来计算网格边界之间单元内的体积含水量<sup>[1]</sup>：

$$\theta_{i+\Delta z,i} = \theta_{i,i} + (V_{i,i-1/2} - V_{i,i+1/2}) \frac{\Delta t}{\Delta Z} \tag{14}$$

我们知道,在接近饱和的土壤中,  $K \sim \Psi$  曲线的梯度非常小,在饱和土壤中,梯度为零。在这种情况下,  $\alpha_i$  值很小或等于零,由方程(8)便知,这会产生数值问题。因此,应该使用一个很小的负  $\Psi$  值来表示饱水点。由此,当计算局部节点的参数值时,为避免负的或零  $\alpha_i$  值, MMS 模型需要用一条光滑的曲线来近似真实的  $K \sim \Psi$  曲线, Haverkamp 等提出了这种近似的方法。

在田间,为了获得非常快速且仍然精确的模拟,若实际土壤层允许,推荐使用的深度增量为  $5 \sim 20 \text{ cm}^{[1]}$ 。

Wind 和 van Doorne 为避免数值振荡,给出下列关系式作为计算中选择最大时间增量的判断准则:

$$\frac{dK}{d\theta} \cdot \frac{e^{\alpha_N \Delta Z} + 1}{e^{\alpha_N \Delta Z} - 1} \frac{\Delta t}{\Delta Z} < 1 \quad (15)$$

一旦  $\Delta Z$  选定,方程(15)能自动估计在计算中给定时刻最大的时间增量。这样,在所有网格边界处计算最大允许的时间增量,然后选择最小值作为所用的时间增量,这对处理层状土壤特别重要。

在一维溶质传输对流-扩散方程(CDE)的有限差分格式的计算中,为避免数值误差,常进行 Courant 数分析,这种方法也可用于非饱和流动方程<sup>[1]</sup>。为此,将方程(3)写作:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right] - \frac{dK(\theta)}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \quad (16)$$

它与 CDE 在数学上是等价的,所以对方程(16)而言,传统的对流和扩散 Courant 数 ( $CR_c$  和  $CR_d$ )为:

$$CR_c = \frac{dK(\theta)}{d\theta} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta Z} \quad (17)$$

$$CR_d = D(\theta) \frac{\Delta t}{\Delta Z^2} \quad (18)$$

由方程(15),便得到使用 MMS 模型避免数值振荡(numerical oscillation)的判别标准<sup>[1]</sup>:

$$CR_c < \frac{e^{\alpha_N \Delta Z} - 1}{e^{\alpha_N \Delta Z} + 1} \quad (19)$$

## 2 数值模拟

取吴擎龙(1993)的土壤资料,模拟的土壤为:1. 重粘土;2. 轻粘土;3. 粉质粘土;4. 壤土及三层质地土壤(上层为 2,中层为 1,下层为 3)。水分特征曲线采用 van Genuchten 推荐的幂函数表达式:

$$\theta = \begin{cases} \frac{P_1 P_2}{P_2 + |\Psi|^{P_3}} + P_4 & \Psi < 0 \\ \theta_s & \Psi \geq 0 \end{cases} \quad (20)$$

水力传导度采用 Gardner(1958)的指数函数形式表达:

$$K(\Psi) = \begin{cases} K_s e^{\alpha \Psi} & \Psi < 0 \\ K_s & \Psi \geq 0 \end{cases} \quad (21)$$

(20)和(21)式中的  $P_1, P_2, P_3, P_4$  及  $\alpha$  为拟合参数,其中  $P_4$  为残余含水率,  $P_1 + P_4 = \theta_s$ ,  $\theta_s$  为饱和含水率,  $K_s$  为饱和导水率,具体取值见下表<sup>[6]</sup>:

表 1 土壤水运动参数概化表

土壤质地	参 数					
	P1	P2/cm	P3	P4	Ks /cm·min <sup>-1</sup>	α /cm <sup>-1</sup>
重粘土	0.28	70.030	0.66	0.27	6×10 <sup>-6</sup>	0.002
轻粘土	0.28	50.159	0.63	0.16	6×10 <sup>-5</sup>	0.005
粉质粘土	0.31	175.995	0.80	0.11	6×10 <sup>-4</sup>	0.01
壤 土	0.32	186.441	0.86	0.09	6×10 <sup>-3</sup>	0.02

为对比起见,采用 Crank-Nicolson 有限差分格式求解如下数学模型,对单一质地和三层质地土壤,其定解问题分别为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right] - \frac{\partial K(\theta)}{\partial Z} \\ \theta = \theta_i \quad (\text{const.}), & Z \geq 0, t = 0 \\ \theta = \theta_s & Z = 0, t > 0 \\ \theta = \theta_s & Z = L, t > 0 \end{cases} \quad (22)$$

和

$$\begin{cases} C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[ K(h) \frac{\partial h}{\partial Z} \right] - \frac{\partial K(h)}{\partial Z} \\ h = h_s(Z) \text{ (steady profile)}, & Z \geq 0, t = 0 \\ h = 0 & Z = 0, t > 0 \\ h = h_i & Z = L, t > 0 \end{cases} \quad (23)$$

下面给出重粘土和轻粘土在不同初始含水率下的模拟结果(图 2 至图 5),图 6 为三层质地土壤的模拟结果。由图可见,两种数值方法的计算结果吻合很好,但从所费机时看,MMS 模型却能大大节省模拟粘性质地土壤水分运动所用时间。

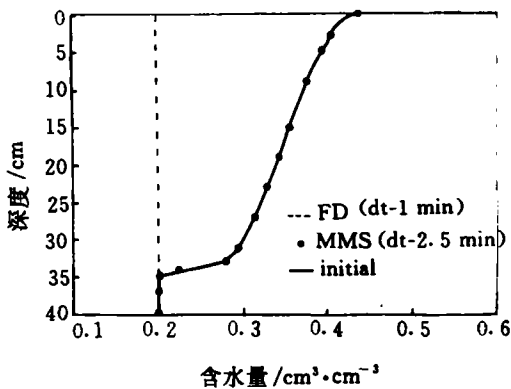


图 3 较低初始含水率下轻粘土水分动态 (t=96 h)

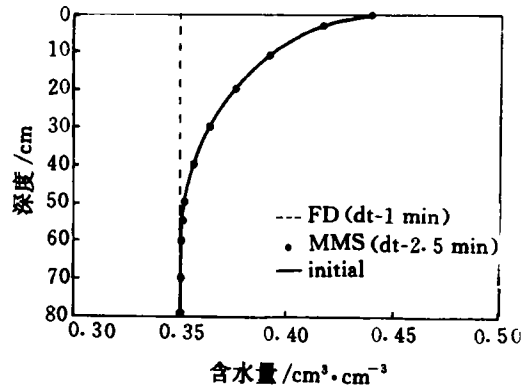


图 4 较高初始含水率下重粘土水分动态 (t=48 h)

### 3 结 语

粘性土壤非饱和水分流动方程的数值解,往往耗费大量机时,而运动平均斜率(MMS)模型由于仅需计算七个精确方程而不需反复求解方程组,且数值稳定性的判别标准易于控制,所以它具有编程容易、计算简捷快速的优点,特别是长期预报粘性土壤水分动态时,能比常规有限差分法大大提高计算效率。此外,该模型还可直接求得层状土壤的含水率分布。

但该模型的建立是基于非饱和土壤水力传导度具有  $K(\Psi) = K_s e^{\alpha\Psi}$  的形式,这在一定程度上使应用受到限制。

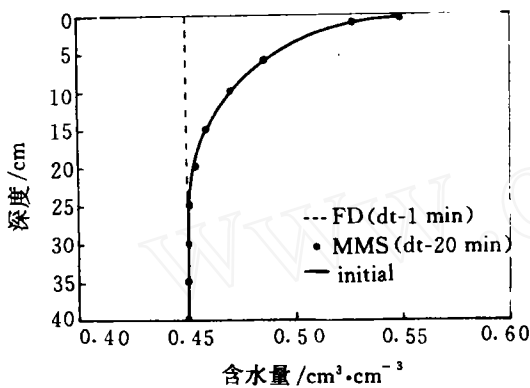


图5 较高初始含水率下轻粘土水分动态  
( $t=48$  h)

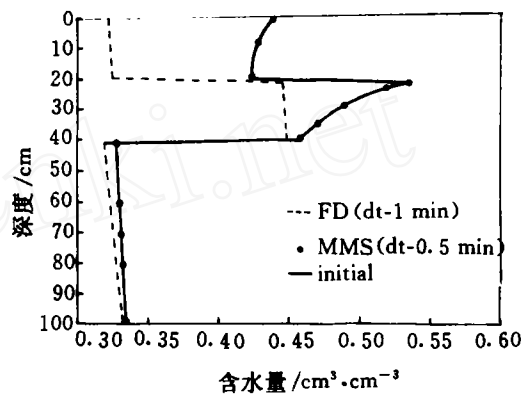


图6 三层质地土壤水分动态  
( $t=240$  h)

### 参 考 文 献

- 1 Moldrup P, Rolston D E, Hansen J Aa. Rapid and numerical stable simulation of one-dimensional, transient water flow in unsaturated layered soils. *Soil Sci*, 1989, 148: 219~226
- 2 Wind G P, van Doorne W. A numerical model for the simulation of unsaturated vertical flow of moisture in soils. *JHydrol*, 1975, 24: 1~20
- 3 Richter J. A simple numerical solution for the vertical flow equation of water through unsaturated soils. *Soil Sci*, 1980, 129: 138~144
- 4 Haverkamp R, Vauclin M, Wierenga P J, Vachaud G. A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration. *Soil Sci Soc Am J*, 1977, 41: 285~294
- 5 van Genuchten M Th. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soil. *Soil Sci Soc Am J*, 1980, 44: 892~899
- 6 吴擎龙. 田间腾发条件下水热迁移数值模拟的研究. [博士学位论文], 北京:清华大学, 1993
- 7 Gardner W R. Some steady state solution of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Sci*, 1958, 85: 228~232