

层状土壤中一维非饱和土壤水分运动的随机模拟^①

黄冠华^②

沈荣开

(中国农业大学水利与土木工程学院) (武汉水利电力大学)

摘要 在田块尺度条件下的层状土壤中,土壤水力特性及土壤水分变量在空间上的分布可以看作是一维随机空间函数的实现。利用 AR(1),MVAR(1)和 NNM 等 3 种随机生成模型分别生成饱和和水力传导度、孔隙大小分布参数和容水度的随机样本,在此基础上利用随机模拟法对一维非饱和土壤水分运动进行了随机模拟。结果表明:不同的土壤参数的空间变异对非饱和土壤水分运动的影响是不同的,土壤参数的方差越大,对非饱和土壤水分运动的影响越大;土壤参数的空间变异尺度越大,对非饱和土壤水分运动的影响越大;随机模拟计算所得的水分变量的一阶矩与大尺度模型计算结果甚相一致。

关键词 层状土壤;非饱和土壤水分运动;Monte Carlo 模拟;随机空间函数

中图分类号 S152.7

Stochastic Analysis of One-dimensional Unsaturated Flow in a Stratified Soil

Huang Guanhua

Shen Rongkai

(College of Water Conservancy and Civil Engineering, CAU) (Wuhan University of Hydraulic & Electric Engineering)

Abstract The spatial distributions of soil hydraulic properties and soil water variables in a stratified soil are described as random space functions, and three types of models of AR(1), MVAR(1), and NNM are adopted to generate realizations for saturated hydraulic conductivity, poresize distribution parameter and soil water capacity. The influences of the spatial variability of soil parameters on one-dimensional unsaturated flow in a stratified soil are synthetically analyzed with Monte Carlo simulation. The results indicated that the influences of spatial variability of different soil parameters on unsaturated flow are different each other. The first order moments of soil water variables are in consistence with those calculated by large-scale unsaturated flow model.

Key words stratified soil; unsaturated flow; Monte Carlo simulation; random space function

在田块尺度条件下,在远小于空间变异尺度的空间范围内,对所研究的土壤参数及变量进行空间上的平均后所得到的结果即为该尺度下相应的土壤参数及土壤水分变量的点值^[1],而且以相应的点值为基础建立的描述土壤水流运动的控制性方程即为确定性的 Richards 方程。

收稿日期:1996-11-19

①国家自然科学基金青年基金及国家教委博士点基金资助项目

②黄冠华,北京清华东路 17 号中国农业大学(东校区)104 信箱,100083

由于可以将田块尺度条件下土壤参数及土壤水分变量的点值在空间上的分布看作是相应的随机空间函数的实现,因此以点值为基础建立的描述土壤水分运动的数学模型是一随机模型。要求解该模型并由此获得有关土壤水分变量时空分布的统计矩,必须借助相应的随机方法,其中之一便是 Monte Carlo 随机模拟法。该方法的实质是视田块尺度条件下的非饱和土壤水分运动为一随机系统,将已知统计结构的土壤参数作为系统的随机输入,而将未知统计结构的土壤水分变量作为系统的随机输出,并根据系统的输入、输出的关系方程——以点值为基础的土壤水分运动方程确定系统输出的统计结构。实施该方法的基本步骤为:第一,根据土壤参数的统计结构,利用随机生成法生成若干个土壤参数的随机样本;第二,针对每一个土壤参数的随机样本,利用数值方法求解以点值为基础的土壤水分运动的数学模型,并由此而获得若干个土壤水分变量的随机样本;第三,对所有的土壤水分变量的随机样本进行统计分析,可得到土壤水分变量时空分布的统计矩。在层状土壤的流动区域中,平行于分层方向土壤特性的空间变异尺度远大于垂直于分层方向的空间变异尺度,因此土壤水力特性在空间上的分布可近似地视为沿垂直于土壤分层方向的一维随机空间函数的实现。笔者据此以一维垂向非饱和土壤水分运动为基础,应用 Monte Carlo 随机模拟法分析来研究土壤水力特性的空间变异性对非饱和土壤水分运动的影响,并将其求解结果与大尺度模型^[3]的求解结果进行比较分析。

1 土壤参数随机场样本的生成模型

土壤参数随机场样本的生成是对非饱和土壤水分运动进行随机模拟的基础。随机场样本生成的方法多种多样,这里采用 AR(1),MVAR(1)和 NNM 等 3 种模型。对于任一给定的随机场 $Y(x)$,这 3 种模型的形式分别为

$$Y_i = a_1 Y_{i-1} + \epsilon_i \quad (1)$$

$$Y_i = AY_{i-1} + B\epsilon_i \quad (2)$$

$$Y_i = \gamma(Y_{i-1} + Y_{i+1}) + \epsilon_i \quad (3)$$

式(1),(2)和(3)分别为 AR(1)生成模型、MVAR(1)生成模型和 NNM 生成模型。其中: Y_i , Y_{i-1} 分别为空间网格块 $i, i-1$ 的参数值; $\{\epsilon_i\}$ 是零均值的独立同正态 $N(0, \sigma_\epsilon^2)$ 分布的随机序列或正态白噪声序列; a_1 为 AR(1)模型的待估参数; Y_i, ϵ_i 均为列向量,且 $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im})^T$, $\epsilon_i = (\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}, \dots, \epsilon_{im})^T$; $\{\epsilon_{ij}\}$ ($j=1, 2, \dots, m$)为标准正态白噪声序列, ϵ_{ij} 服从正态 $N(0, 1)$ 分布; m 为变量个数; A, B 是 $m \times m$ 的待估系数矩阵; γ 为 NNM 模型的待估参数。各生成模型中参数的估计见文献[1, 2]。

应用各生成模型进行参数随机场样本的生成时,其生成步骤大致可分为 3 步。以 AR(1)生成模型为例,生成随机场样本步骤如下:

1)若已知随机场 Y 的统计结构,可利用关系式 $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_Y^2(1 - a_1^2)$ 求出 σ_ϵ^2 ,然后利用随机数发生器生成样本容量为 N 的正态随机序列 $\{\epsilon_i\}$, $\epsilon_i \in N(0, \sigma_\epsilon^2)$ 。

2)由式(1)进行递推计算,即可得到均值为零、方差为 σ_Y^2 的空间相关随机序列 $\{Y_i'\}$ 。

3)由关系式 $\{Y_i\} = \{Y_i'\} + \mu_Y$ 进行转移计算,即可得到所要生成的随机序列 $\{Y_i\}$, $Y_i \in N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$,此序列是随机场 $Y(x)$ 的一随机实现或随机抽样。

2 一维非饱和土壤水分运动的数学模型及参数的解析表示

2.1 基本方程与定解条件

不考虑源汇项的情况下,一维非饱和土壤水分运动的方程可表示为

$$C(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h)\frac{\partial h}{\partial z} - K(h) \right) \quad (4)$$

式中: h 是土壤基质势; $K(h)$ 是非饱和水力传导度; $C(h)$ 是容水度; z 是垂直向坐标,向下为正。

考虑上边界无蒸发及入渗,其边界条件可表示为

$$-K(h)\frac{\partial(h-z)}{\partial z} = 0, z=0, t \geq 0 \quad (5a)$$

假设下边界是水头梯度为零的边界,即

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 0, z=L, t \geq 0 \quad (5b)$$

初始条件为

$$h(z, 0) = h_0(z), 0 \leq z \leq L, t = 0 \quad (5c)$$

2.2 参数的解析表示及其统计结构

这里采用 Gardner 于 1958 年提出的指数公式来表示非饱和水力传导度与基质势的关系:

$$K(h) = K_s \exp(-\alpha|h|) \quad (6)$$

为了便于分析,土壤水分特征曲线采用一直线式模型

$$\theta(h) = \theta_s - C|h| \quad (7)$$

式(6)和(7)中: K_s 为饱和水力传导度; α 为孔隙大小分布参数; θ_s 为饱和含水率,假设它是一个固定值,不随空间位置而变化; C 是容水度,不随 h 的变化而变化。假设 K_s 的对数 $\ln K_s$ 和 α, C 在空间上是随机变化的,采用 Unlu 等^[3]给出的统计特征值(见表1)作为分析的基础。

表1 参数的统计特征值

参数	均值	方差	相关系数		
			$\ln K_s$	α	C
$\ln K_s$	-0.338 3	0.391 0	1		
α	0.022 5	2.48×10^{-5}	0.770	1	
C	3.23×10^{-4}	2.09×10^{-9}	0.420	0.333	1

将 120 cm 深土层分成厚度相同的 100 层(每层厚 1.2 cm),每层中的土壤参数值构成的序列便是这些参数随机场的样本。根据上述参数的统计特征值,并假定相关长度为 5,20 cm 这 2 种情况下,分别用 AR(1)模型、MVAR(1)模型及 NNM 模型生成相应的 $\ln K_s, \alpha$ 和 C 的样本。为了避免边界的影响,生成区域比实际流动区域多 100 层,即每个生成样本的容量 $N=200$,取其中间的 100 个值作为所对应的每层的参数值;通过计算可知当 Monte Carlo 数(即样本个数) $N_{MC}=50$ 时,生成样本的统计结构趋于稳定且与理论上的统计结构(自相关函数)拟合良好。

3 土壤水分时空分布的 Monte Carlo 模拟

3.1 土壤水运动方程求解的数值方法

采用中心有限差分格式求解方程(4),按参数样本生成时所划分的土层将 120 cm 厚的流动区域划分成等间距的单元共 100 个,单元节点数为 101。

3.2 水分变量的统计分析

将前述每个样本的参数值代入数值求解方程中进行计算,得到相应于不同生成参数样本情况下的土壤基质势、水分通量及含水率的时空分布样本,对这些样本进行统计分析可得到它们在各时刻、各空间位置上的统计均值与方差:

$$\bar{\varphi}(x,t) = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{\omega=1}^{N_{MC}} \varphi(x,t;\omega)$$

$$\sigma_{\varphi}^2(x,t) = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{\omega=1}^{N_{MC}} [\varphi(x,t;\omega) - \bar{\varphi}(x,t)]^2$$

式中 φ 既是空间坐标及时间的函数,同时在样本空间 $\omega \in \Omega$ 中又是随机变化的。

3.3 模拟结果的分析与讨论

3.3.1 参数的空间变异尺度

对土壤水分变量均值与方差的影响 从图 1(a)可以看出在不同的空间变异尺度条件下,尽管平均土壤基质势之间的差别随时间逐渐增大,但这种差别在量上仍然很小;因此参数的空间变异尺度对土壤水分变量均值的影响是很小的。从图 1(b)可以看出相关长度对基质势方差的影响十分显著。在时间上呈现出这样的规律,不同相关长度所对应的

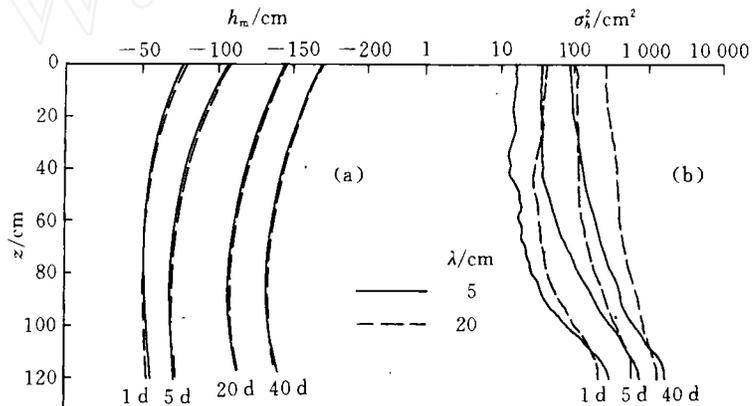


图 1 参数相关长度 $\lambda=5, 20$ cm 时平均土壤基质势(a)和基质势方差(b)时空分布的比较

基质势方差之间的差异随时间而增大;在空间上,随着深度的增加,不同相关长度所对应的基质势方差之间的差异逐渐减小。

3.3.2 参数之间的相关关系对水分变量均值及方差的影响 从图 2(a)可以看出,用不同的生成模型所生成的参数进行计算所得剖面上的平均基质势十分接近。这说明考虑变异参数之间是否相关对水分变量均值的影响很小;但是从图 2(b)可以看出用 MVAR(1)模型生成的参数进行计算与用 AR(1)模型和 NNM 模型生成的参数进行计算所得水分变量的方差的差别是较大的,尤其是基质势方差,这种差别接近 1 个数量级,说明参数之间的相关状况对水分变量方差的影响十分显著。

3.3.3 不同参数的空间变异对水分变量均值与方差的影响程度分析 以相关长度为 5 cm、生成参数模型为 AR(1)所生成的参数作为分析基础,分以下 4 种情况进行分析:1)考虑所有

参数 K_s , α 和 C 的空间变异性; 2) 不考虑参数 C 的空间变异性; 3) 不考虑参数 K_s 的空间变异性; 4) 不考虑参数 α 的空间变异性。将这 4 种情况下计算所得的水分变量的均值与方差进行比较, 从图 3(a) 可以看出上述 4 种情况下土壤基质势均值十分接近, 说明上述 3 种参数的空间变异性对水分变量均值的影响极小; 但是从图 3(b) 可以看出 1) 和 2) 这 2 种情况下的基质势方差比较

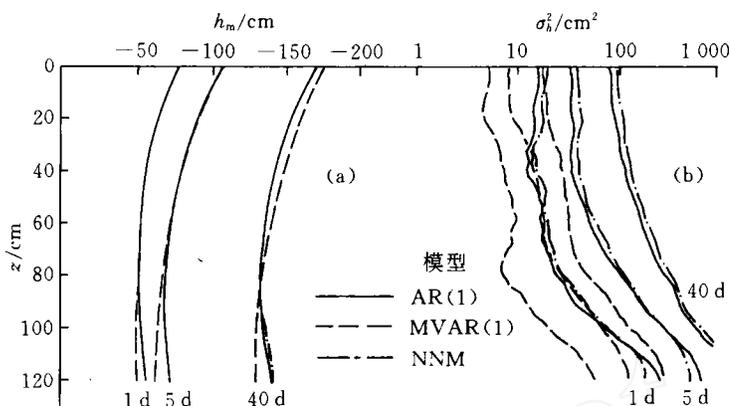


图 2 生成参数的模型不同时平均土壤基质势(a)和基质势方差(b)时空分布的比较

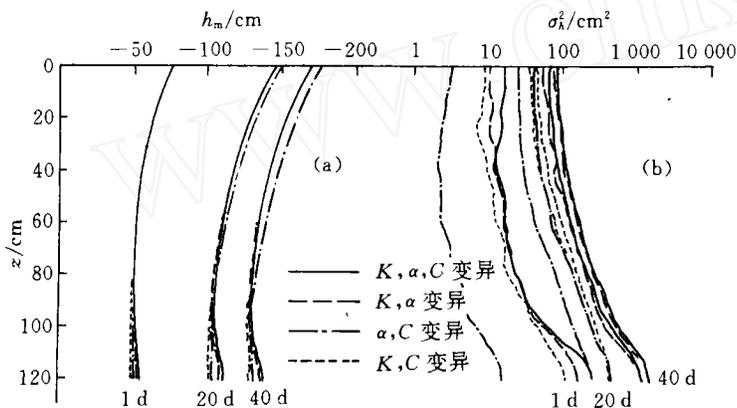


图 3 考虑不同参数的空间变异性时平均土壤基质势(a)和基质势方差(b)时空分布的比较

接近, 情况 4) 的基质势方差比情况 1) 和 2) 的小, 而且随着时间的增长其差别逐渐增大, 而情况 3) 的基质势方差则明显地比情况 1) 和 2) 的小, 也比情况 4) 的小。但 3) 和 4) 这 2 种情况下土壤基质势方差的差异具有如下规律: 从水分重分布开始后的一段时间内逐渐增加, 当到达某一时刻后随着时间的继续增长则逐渐减小。这说明参数 K_s 的空间变异性对非饱和土壤水分运动的影响

比 C 和 α 的大, 而参数 α 的空间变异性对非饱和土壤水分运动的影响比 C 的大。产生这种现象的主要原因是参数的方差不同, 从表 1 可以看出 $\ln K_s$ 的方差比 α 的方差大 4 个数量级, 而 α 的方差则比 C 的方差大 4 个数量级; 因此在本文例子的分析中, 当研究土壤水力特性的空间变异性对非饱和土壤水分运动的影响时, 饱和水力传导度的空间变异性特征是主要应考虑的因素, 模型参数如 α 次之, 而容水度 C 的空间变异性则是次要的考虑因素。

此外, 从图 1~3 可以看出土壤基质势方差是随平均基质势的增大而增大的。

4 Monte Carlo 模拟与大尺度模型计算结果的比较

Mantoglou 和 Gelhar^[3,4] 在假设参数 K_s , α 和 C 均为三维空间随机函数实现的条件下, 利用小扰动与谱分析相结合的方法, 推导出大尺度非饱和水流运动宏观特性的数学模型及层状土壤(stratified soil)中水分运动宏观特性参数的解析结构。在一维条件下, 其数学模型的控制性方程为

$$C^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_{11}^* \frac{\partial (H-z)}{\partial z} \right]$$

在脱湿情况下,宏观参数的解析结构为

$$C^* = \Gamma$$

$$\Theta = -\Gamma H + \theta_s + \sigma_s^2 / A\Gamma$$

$$K_{11}^* = \exp(F - AH + \sigma_a^2 HA - \sigma_s^2 / 2\Gamma^2)$$

其中 C^* , K_{11}^* 分别为有效容水度及垂直于土壤分层方向的有效水力传导度; H , Θ 分别为有效(平均)基质势及含水率; A , σ_a^2 是参数 α 的统计均值与方差; Γ , σ_s^2 是参数 C 的统计均值与方差; F 是参数 $\ln K_s$ 的统计均值; θ_s 是饱和含水率, 在研究中不考虑其空间变异性, 仅取其统计均值, 在此 $\theta_s = 0.38$ 。

将上述参数代入大尺度水流运动模型中进行求解, 可得到宏观水力特征值 H 和 Θ 的时空分布, 如图 4 所示。可以看出 Monte Carlo 模拟结果与大尺度模型计算所得的宏观变量的值十分接近。

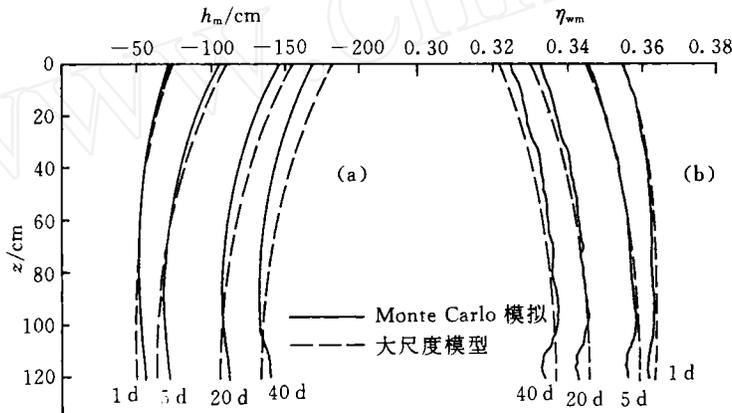


图 4 用 Monte Carlo 模拟与大尺度模型求得的平均土壤基质势(a)和平均含水率(b)时空分布的比较

5 结 论

1) 相关长度是表征土壤参数空间变异性对非饱和土壤水分运动的影响的一个重要统计量; 参数的相关长度越大, 对非饱和土壤水分运动的影响越大。

2) 不同参数之间的相关程度是影响非饱和土壤水分运动的一个重要因素; 不同参数之间的相关程度越高, 其空间变异性对非饱和土壤水分运动的影响越小。

3) 不同参数的空间变异性对非饱和土壤水分运动影响的程度不同, 就本文讨论的一维随机模拟的例子而言, 饱和水力传导度 K_s 的空间变异性对非饱和土壤水分运动的影响最大, 孔隙大小分布参数 α 次之, 容水度 C 最小。

4) 层状土壤条件下 Monte Carlo 模拟所得的水分变量的一阶矩与由包含宏观参数的大尺度非饱和土壤水分运动模型的求解结果十分接近, 而且 Monte Carlo 模拟结果表明土壤基质势方差是随平均基质势的增大而增大的, 两者呈正比关系, 这种关系与本文第一作者过去的理论分析结果是一致的。

参 考 文 献

- 1 黄冠华. 非饱和土壤水分动态的随机模拟及作物水分生产函数的研究:[学位论文]. 武汉:武汉水利电力大学,1995. 125
- 2 黄冠华,沈荣开. 土壤水力特性空间变异性的随机模拟. 武汉水利电力大学学报,1995,29(3):13~18
- 3 Unlu K, Kavvas M L, Neilsen D R. Stochastic analysis of field measured unsaturated hydraulic conductivity. *Water Resour Res*,1989,25(12):2511~2519
- 4 Mantoglou A, Gelhar L W. Stochastic modeling of large-scale transient unsaturated flow system. *Water Resour Res*, 1987,23(1):37~46
- 5 Mantoglou A, Gelhar L W. Effective hydraulic conductivities of transient unsaturated flow in stratified soils. *Water Resour Res*,1987,23(1):57~67

www.cnki.net