中国农业大学学报　1997,2(4):15～20
Journal of China Agricultural University

一类三角级数的性质

韩书琴[①]　　欧智明
(中国农业大学工程基础科学部)　(北京邮电大学)

摘　要　讨论级数 $\sum_{n-1}^{\infty} n^{-\alpha}\exp(-zn^{\beta})$ 的性质,对 $\mathrm{Re}(z)=0$ 时给出了一些收敛性的判定结论,并指出了以前的 2 个错误结论;对 $\mathrm{Re}(z)>0, 0<\beta<1$ 时给出了它的幂级数展开式。

关键词　三角级数;三角和反转公式;复数域内的幂级数
中图分类号　O173.1

On a Certain Kind of Trigonometric Series

Han Shuqin　　Ou Zhiming
(College of Applied Engineering Sciences, CAU)　(Beijing University of Post and Telecom)

Abstract　The properties of the series $\sum_{n-1}^{\infty} n^{-\alpha}\exp(-zn^{\beta})$ have been discussed and for $\mathrm{Re}(z)=0$ some conclusions on the convergence have been given. Two wrong results existing in former references which are related to this kind of trigonometric series are pointed out. The power series expansion when $\mathrm{Re}(z)>0$ and $0<\beta<1$ are given also.

Key words　trigonometric series; inversion formula of trigonometric sums; complex power series

记 $\exp(x)=\mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}(x)=\mathrm{e}^{2\pi i x}$。级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^{\beta})$$

$(\theta\neq 0)$的收敛性判定是一个十分困难的问题。当然某些情形,如 $\alpha>1$ 或 $\beta\leqslant 0$,或 $\beta=1$ 时是容易判定的;当 $0<\beta<1$ 时,也可作如下判定。

由 Euler 求和公式,有

$$S=\sum_{N<n\leqslant M} n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^{\beta})=\int_{N}^{M} x^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta x^{\beta})\mathrm{d}x-B_1(x)x^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta x^{\beta})\Big|_{N}^{M}+\int_{N}^{M}(x^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta x^{\beta}))' B_1(x)\mathrm{d}x$$

其中 $B_1(x)=\{x\}-1/2$($\{x\}$是 x 的小数部分)。如果选取 N 充分大,使 $|\theta\beta N^{\beta-1}|\leqslant 1/2$,则有

$$S=\int_{N}^{M} x^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta x^{\beta})\mathrm{d}x+O(N^{-\alpha})=\frac{1}{2\pi i\theta\beta}\{M^{1-\beta-\alpha}\mathrm{e}(\theta M^{\beta})-N^{1-\beta-\alpha}\mathrm{e}(\theta N^{\beta})\}+O(N^{-\alpha})$$

因此,当 $\alpha>1-\beta$ 时级数收敛;当 $\alpha\leqslant 1-\beta$ 时,级数发散。

但文献[1]在问题 103 的解答中,断言级数

收稿日期:1997-03-10
①韩书琴,北京清华东路 17 号中国农业大学(东校区)71 信箱,100083

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-v}\sin(n^{\beta})$$

在 $\beta>1$ 时，仅对 $v>\beta-1$ 收敛。其证明是不正确的。首先 G'_{-k} 并非有限，而且也不能通过选取 x_1 满足 $(2k\pi)^{1/(\beta-1)}<x_1<n$ 来避免分母为零。事实上，利用文献[2]第2章的定理2.2有以下的三角和反转公式：

当 $\theta>0$ 时

$$S=\sum_{N<n\leqslant M} n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^{\beta})=C\sum_{A\leqslant V\leqslant B}{}' v^{-\alpha_1}\mathrm{e}(\theta_1 n^{\beta_1})+O(R_N+R_M)$$

其中

$$C=(\theta\beta)^{\alpha_1}\mathrm{e}^{\pi i/4}\left(\sqrt{\theta\beta(\beta-1)}\right)^{-1},\alpha_1=\frac{1}{\beta-1}\left(\alpha+\frac{\beta}{2}-1\right)$$

$$\beta_1=\frac{\beta}{\beta-1},\theta_1=\theta^{1/(1-\beta)}(1-\beta)\beta^{-\beta_1}$$

$$R_x=x^{-\alpha}\{\ln(2+x)+\min[H,(\theta\beta(\beta-1)x^{\beta-2})^{-1/2}]\}$$

$$H=\max\left\{\frac{1}{\langle A\rangle},\frac{1}{\langle B\rangle}\right\}$$

而

$$\langle x\rangle=\begin{cases}\min(\{x\},1-\{x\}),x\text{ 不是整数}\\ M^{\beta-1}-N^{\beta-1},x\text{ 为整数}\end{cases}$$

$$A=\theta\beta N^{\beta-1},B=\theta\beta M^{\beta-1}$$

从此公式的证明过程可以看出，产生右边主项的正是文献[1]中所说的“分母为零”的项。

上述反转公式将 $\beta>2$ 的情形化为 $1<\beta_1<2$ 的情形，反之亦然。由此公式可以看出：

1)当 $\alpha_1>1$，即 $\alpha>\beta/2(1<\beta<2)$ 时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^{\beta})$$

对任意 $\theta\neq0$ 收敛。这正是文献[3]的结果。

2)当 $\alpha_1\leqslant0$，即 $\alpha\leqslant1-\beta/2$ 时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^{\beta})$$

发散，因为可选取无穷多个 N,M 使 A,B 为整数。这是文献[4]的一个结论。

当 $\beta_1>1$ 且 β_1 不是整数时，文献[5]利用 Vinogradov 的一个三角和估计式证明了 $\alpha>\beta/2-\rho'$ 时级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^{\beta})$$

收敛，其中 $\rho'=\min[1-\beta/2,\rho(\beta-1)]$，$\rho$ 是一个很小的数。但是其定理2的证明是不正确的。首先其引理4中的 τ 与 Q 有关，而 Q 是变化的，因此 τ 并非常数；另一方面，它所引用的三角和估计(引理4)只对 $q\leqslant Q^{n}$ 有效，但如果用

$$\left|\theta_1-\frac{a}{q}\right|<q^{-2},q<Q^{n},(a,q)=1$$

来限制 q 的范围，又不能体现 θ_1 为无理数的特征，因为对有理数 θ_1，也存在 a,q 使上式成立。

对于某些特殊的无理数 θ_1，文献[5]中定理2是成立的。比如 θ_1 为循环连分数时，由于其

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

部分商 a_n 有界，因此对任意 $P>0$，总存在渐近分数 p_n/q_n 和 p_{n+1}/q_{n+1} 使 $q_n<P\leqslant q_{n+1}=a_nq_n+q_{n-1}<CP$，因此有估计式

$$\sum_{P<n\leqslant 2P}\mathrm{e}(\theta_1 n^{\beta_1})\ll P^{1-\rho'}$$

其中

$$\rho'=\begin{cases}\{3(\beta_1-1)^2\ln[12\beta_1(\beta_1-1)]\}^{-1}\left(1+\dfrac{1}{30(\beta_1-1)}\right),\beta_1\geqslant 12\ \text{为正整数}\\[3\times 11^2\ln(11\times 12^2)]^{-1}\left(1+\dfrac{1}{30\times 11}\right),\beta_1=3,4,\cdots,11\end{cases}$$

因此当 $\alpha>\max[\beta/2-\rho'(\beta-1),\beta-1]$时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^{\beta})$$

收敛。

尽管可以利用非平凡的三角和估计来改进 α 的下界使所给级数收敛，但到目前为止，人们还不知道当 $\beta\geqslant 2$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^{\beta})$$

对哪些无理数 θ 是发散的。对

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^{2})$$

而言，我们猜测若 θ 为无理数，则当 $0<\alpha\leqslant 1/2$ 时级数发散；但由于反转公式中余项较大，我们无法证明或否定这一猜想。

现在讨论 $\beta>1$ 且 β 为正整数的情形。

定理 1　当 $\theta=a/q\in(0,1)$为有理数时，记

$$S(q,a)=\sum_{n=1}^{q}\mathrm{e}\left(\frac{a}{q}n^{\beta}\right)$$

则有：当 $S(q,a)\neq 0$ 时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^{\beta})$$

仅当 $\alpha>1$ 时收敛；当 $S(q,a)=0$ 时，级数当 $\alpha>0$ 时就收敛。

证明　考虑和式

$$S=\sum_{Nq<n\leqslant Mq}n^{-\alpha}\mathrm{e}\left(\frac{a}{q}n^{\beta}\right)\qquad(M>N\geqslant 1)$$

令 $n=qu+v,1\leqslant v\leqslant q,N\leqslant u\leqslant M-1$，则有

$$S=q^{-\alpha}\sum_{v=1}^{q}\mathrm{e}\left(\frac{a}{q}n^{\beta}\right)\sum_{u=N}^{M-1}\left(u+\frac{v}{q}\right)^{-\alpha}$$

由 Euler 求和公式可得

$$\sum_{u=N}^{M-1}(u+vq^{-1})^{-\alpha}=\int_{N}^{M-1}(x+vq^{-1})^{-\alpha}\mathrm{d}x+O(N^{-\alpha})=$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}(M^{1-\alpha}-N^{1-\alpha})+O(N^{-\alpha}),\text{当 }\alpha<1\\ \ln\dfrac{M}{N}+O(N^{-1}),\text{当 }\alpha=1\end{cases}$$

因此根据柯西收敛原理便可知结论成立。

这个定理1完善了文献[5]的定理3,4。

定理2 设θ为无理数,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^2)$$

当$\alpha>1/2$时收敛。

证明 设$\theta\in(0,1)$为无理数,则其渐近分数a_n/q_n有无穷多个,它们满足$|\theta-a_n/q_n|<1/q_n^2$,$(a_n,q_n)=1$。对于充分大的N,考虑和式

$$S_N=\sum_{N<n\leqslant 2N}n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^2)$$

设$N<q_r<q_{r+1}<\cdots<q_s\leqslant 2N$,

$$S_j=\sum_{q_{j-1}<n\leqslant q_j}n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^2)$$

$\theta=\beta_j+a_j/q_j$,则由分部求和法有

$$S_j=\sum_{q_{j-1}<n\leqslant q_j}\Delta[n^{-\alpha}\mathrm{e}(\beta_j n^2)]\sum_{q_{j-1}<v\leqslant n}\mathrm{e}\left(\frac{a_j}{q_j}v^2\right)+q_j^{-\alpha}\mathrm{e}(\beta_j q_j^2)\sum_n\mathrm{e}\left(\frac{a_j}{q_j}n^2\right)$$

式中$\Delta[f(n)]=f(n)-f(n+1)$。根据估计式

$$\sum_{v=1}^{n}\mathrm{e}\left(\frac{a}{q}v^2\right)=\frac{n}{q}S(q,a)+\frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1}S(q,a,b)\frac{1-\mathrm{e}\left(-\frac{b}{q}n\right)}{\mathrm{e}\left(\frac{b}{q}\right)-1}$$

其中
$$S(q,a,b)=\sum_{n=1}^{q}\mathrm{e}\left(\frac{a}{q}n^2-\frac{b}{q}n\right)\ll q^{1/2+\varepsilon}(q,b)$$

可得

$$S_j\ll\sum_n(n^{-\alpha-1}+|\beta_j|n^{1-\alpha})q_j^{1/2+\varepsilon}\ll q_j^{1/2+\varepsilon}(q_j^{-\alpha}+q_{j-1}^{-\alpha})\ll N^{1/2-\alpha+\varepsilon}$$

其中ε为任意小的正数。由于$s-r\leqslant 2$,故

$S_N=\sum_j S_j\ll N^{1/2-\alpha+\varepsilon}$,因此对于任意$M>N$,设$2^RN\leqslant M<2^{R+1}N$,则

$$\sum_{N<n\leqslant M}n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^2)\ll N^{1/2-\alpha+\varepsilon}\sum_{r=0}^{R}(2^r)^{1/2-\alpha+\varepsilon}。$$

当$\alpha>1/2$时,取ε充分小,使$1/2-\alpha+\varepsilon<0$,则

$$\sum_{r=0}^{R}(2^r)^{1/2-\alpha+\varepsilon}$$

有界,因此级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\mathrm{e}(\theta n^2)$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

收敛。

现在讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\exp(-zn^{\beta}) \quad (\mathrm{Re}(z)>0, 0<\beta<1)$$

的幂级数展开式。

当 $\mathrm{Re}(z)>0$时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nz}=\frac{1}{\mathrm{e}^{z}-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n-1}$$

(B_{2n}为 Bernoulli 数)。右边级数的收敛范围是$0<|z|<2\pi$。当$0<\beta<1$时，所给级数可以展开成一个收敛半径为$+\infty$的幂级数，然而当 $\beta>1$时却没有幂级数展开式。

定理3 设$0<\beta<1$,$\mathrm{Re}(z)>0$,z^{-s}取主值，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\exp(-zn^{\beta})=f(z)$$

对任意 α 收敛(α 为实数)，且当 $\alpha\neq 1+k\beta$(k 为非负整数)时，有

$$f(z)=\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)z^{-(1-\alpha)/\beta}+\zeta(\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}C_{n}z^{n} \tag{1}$$

其中

$$C_{n}=(2\pi)^{\alpha-\beta n-1}\sin\frac{\pi(\alpha-n\beta)}{2}\Gamma(1+n\beta-\alpha)\zeta(1+n\beta-\alpha)=\zeta(\alpha-n\beta)$$

当 $\alpha=1$时，有

$$f(z)=\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{\beta}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}C_{n}z^{n} \tag{2}$$

式中 γ 为欧拉常数。当 $\alpha=1+k_{0}\beta$ 时可用逐项积分的方法得出，这里不再列出其展开式。

证明 由

$$\Gamma(s)=\int_{0}^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \quad (\mathrm{Re}(s)>0)$$

知，积分线可移到半射线$\arg s=\alpha$,($|\alpha|<\pi/2$)上，因此由 Mellin 变换公式可得，当 $\mathrm{Re}(z)>0$时

$$\mathrm{e}^{-z}=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{C-\mathrm{i}\infty}^{C+\mathrm{i}\infty}\Gamma(s)z^{-s}\mathrm{d}s\,(C>0)$$

因此

$$\sum_{n=1}^{N} n^{-\alpha}\exp(-zn^{\beta})=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C-\mathrm{i}\infty}^{C+\mathrm{i}\infty}\Gamma(s)z^{-s}\left(\sum_{n=1}^{N}n^{-\alpha-\beta s}\right)\mathrm{d}s$$

选取 $C>\max[0,(1-\alpha)/\beta]$，在 $\mathrm{Re}(z)>0$的条件下，利用 $\Gamma(s)$的渐近公式

$$\Gamma(s)=\sqrt{2\pi}\exp\left[(z-\frac{1}{2})\ln z-z+O\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

可得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C-\mathrm{i}\infty}^{C+\mathrm{i}\infty}\Gamma(s)z^{-s}\zeta(\alpha+\beta s)\mathrm{d}s$$

右边的被积函数在 $s_{0}=0$,$s_{n}=-n$ 及 $s_{0}'=(1-\alpha)/\beta$ 处有极点，当 $\alpha\neq 1+k\beta$ 时，这些极点都是一阶极点。在 s_{n} 处的残数为

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{(-1)^n}{n!}\zeta(\alpha-\beta n)z^n=\frac{(-1)^n}{n!}C_n z^n$$

在 s_0' 处的残数为 $\Gamma[(1-\alpha)/\beta]z^{(\alpha-1)/\beta}$。当 $\alpha=1$时，$s_0=s_0'=0$为二阶极点，易算出此时的残数为 $1/2-\gamma/\beta$。

现在把积分线移到 $\mathrm{Re}(s)=-M+C_0=C_1$（$M$ 为充分大的正整数，而 $C_0\in(0,1)$使得 $\alpha+\beta C_1$不是负整数），考虑积分

$$\int_{C_1-\mathrm{i}T}^{C_1+\mathrm{i}T}\Gamma(s)z^{-s}\zeta(\alpha+\beta s)\mathrm{d}s\quad(C_1<0)$$

由 $\zeta(s)$的函数方程

$$\zeta(s)=2\zeta(1-s)(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}$$

及

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(M+s)}{s(s+1)\cdots(s+M-1)}$$

的渐近公式可知被积函数的阶为

$$\ll\exp[-|t|(\pi/2-\arg z)]\cdot|t|^{(\beta-1)M}\qquad(|t|\geqslant 2)$$

当 $|t|\leqslant 2$ 时，可得出被积函数之阶$\ll\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^M(\beta/2\pi)^M$，因此当 $T\to+\infty$及 $M\to+\infty$时上述积分趋于零。类似地可证明积分

$$\left(\int_{C+\mathrm{i}T}^{C_1+\mathrm{i}T}+\int_{C_1-\mathrm{i}T}^{C-\mathrm{i}T}\right)\Gamma(s)z^{-s}\zeta(\alpha+\beta s)\mathrm{d}s$$

当 $T,M\to+\infty$时为零。因此，根据 Cauchy 积分定理有

$$f(z)=\lim_{M\to+\infty}\left\{\operatorname*{Res}_{s=s_0'}[\Gamma(s)z^{-s}\zeta(\alpha+\beta s)]+\sum_{n=0}^{M-1}\operatorname*{Res}_{s=s_n}[\Gamma(s)z^{-s}\zeta(\alpha+\beta s)]\right\}$$

这就得到了公式(1)和(2)。又易知 $0<\beta<1$ 时右边幂级数的收敛半径为$+\infty$。定理证毕。

参 考 文 献

1 佚名.国际最佳数学征解问题分析.陈湘能，黄汉侠，钱祥征，等译.长沙：湖南科学技术出版社，1983.198～201

2 闵嗣鹤.数论的方法(下).北京：科学出版社，1983.36～39

3 Akita M，Kano T.On the Convergence of $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\sin(\theta n^\beta)$. Proc Japan Acad，1982，58(3)：172～174

4 Wilton J R. An approximate functional equation of simple type，Ⅰ. J London Math Soc，1934，9(3)：194～201

5 Akita M，Iseki S. On the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\exp(2\pi\mathrm{i}\theta n^\beta)$. In：Akiyama，et al ed. Num Theory and Com. Tokyo：World Sci Pub Co，1984.1～20

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net