中国农业大学学报　1997,2(4):11～14
Journal of China Agricultural University

Bezout 矩阵与多项式稳定性判别法的一种新证明

杨　正　宏①
（中国农业大学工程基础科学部）

摘　要　通过用 Vander Monde 矩阵将 Bezout 矩阵同步转化成对角形式，对一类古典多项式稳定性判别法给出新的证明。

关键词　Bezout 矩阵；多项式；稳定性；证明
中图分类号　O151.21

Bezout Matrix and a New Proof of Some Classic Stability Criterions of Polynomials

Yang Zhenghong
(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Abstract　The Bezout matrix is reduced to diagonal form with the congruence given by Vander Monde matrix. This result is applied to obtain a new proof of some classical stability criteria of polynomials.

Key words　Bezout matrix; polynomials; stability; proof

矩阵的特征值或多项式的根在复平面内的分布叫惯性分布，简称惯性。当特征值或根分布在某些特定区域时，称该矩阵或多项式是稳定的。多项式的稳定性通常转化成一种叫 Bezout 的矩阵去判断，这方面有许多经典的结果，如文[1]等，但它们的证明都基于较繁琐的计算。文[2]中曾给出了一个将 Bezout 矩阵用广义 Vander Monde 矩阵同步转化成对角形式的结果，笔者试图用这一结果对几个古典稳定性判别法给出新的证明，这种证明简单明了，无需太多的计算。

给定 2 个实系数多项式 $p(\lambda)$，$q(\lambda)$，其中 $q(\lambda)$ 的次数 $\deg q(\lambda)=n$ 且最高次项的系数为 1，称为首一多项式，$p(\lambda)$ 的次数 $\deg p(\lambda)\leqslant n$，Bezout 矩阵 $\boldsymbol{B}(q,p)$ 由如下形式定义：

$$\frac{q(\lambda)p(\mu)-p(\lambda)q(\mu)}{\lambda-\mu}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\lambda^{i-1}\mu^{j-1} \tag{1}$$

定义 1　称 $\boldsymbol{B}(q,p)=(b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 为 $q(\lambda)$ 与 $p(\lambda)$ 的 Bezout 矩阵。

关于 Bezout 矩阵 $\boldsymbol{B}(q,p)$ 有如下一些基本结果，更一般的讨论见文[1,3]等。

$\boldsymbol{B}(q,p)$ 是对称矩阵

$$\boldsymbol{B}(q,p)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}(q,p) \tag{2}$$

这里，T 表示矩阵取转置

$$\boldsymbol{B}(p,q)=-\boldsymbol{B}(q,p)$$

收稿日期：1997-01-22
①杨正宏，北京清华东路 17 号中国农业大学（东校区）71 信箱，100083

$\boldsymbol{B}(q,p)$有如下显示表达式：

$$\boldsymbol{B}(q,p)=\boldsymbol{S}(q)p(\boldsymbol{C}_q) \tag{3}$$

其中

$$q(\lambda)=\lambda^n+q_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+q_1\lambda+q_0$$

$$\boldsymbol{S}_q=\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_{n-1} & 1 \\ q_2 & q_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ q_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

叫做$q(\lambda)$的对称化子；

$$\boldsymbol{C}_q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ -q_0 & -q_1 & & \cdots & -q_{n-1} \end{bmatrix}$$

叫做$q(\lambda)$的友矩阵。

$\boldsymbol{B}(q,p)$满足以下缠绕关系式：

$$\boldsymbol{B}(q,p)\boldsymbol{C}_q=\boldsymbol{C}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(q,p) \tag{4}$$

定义2 多项式$q(\lambda)$称为稳定的，如果它的全部根都位于开左半平面内，即根的实部都是负数。

定义3 2个首一多项式$q(\lambda)$与$p(\lambda)$称为一个正对，如果它们满足以下条件：

1)$q(\lambda)$与$p(\lambda)$的根都是负实根且为单重根，排序为

$q(\lambda):\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n,\deg q(\lambda)=n$

$p(\lambda):\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_{n-1},\deg p(\lambda)=n-1$

$\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n,\deg p(\lambda)=n$

2)λ_i和μ_i满足以下交错关系：

$\lambda_1<\mu_1<\lambda_2<\cdots<\mu_{n-1}<\lambda_n(<0),\deg p(\lambda)=n-1$

$\mu_1<\lambda_1<\mu_2<\lambda_2<\cdots<\mu_n<\lambda_n(<0),\deg p(\lambda)=n$

现给出主要结果。

由文[2]的定理2可得

引理1(这是文[2]中定理2的结果在$n_i=1$时的情形) 设

$$q(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$$

λ_i互不相同，则

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{B}(q,p)\cdot\boldsymbol{V}=\mathrm{diag}[q'(\lambda_i)p(\lambda_i)]_{i=1}^{n}$$

其中

$$V=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

是特殊 Vander Monde 矩阵。

以下用引理 1 作为主要工具对一古典稳定性判别准则给出新的证明。首先,设 $q(\lambda)=\lambda^n+q_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+q_1\lambda+q_0$,令 $q_+(\lambda)=\Sigma q_{2j}\lambda^j,q_-(\lambda)=\Sigma q_{2j+1}\lambda^j$,则 $q_+(\lambda)$ 与 $q_-(\lambda)$ 满足以下关系式:$q(\lambda)=q_+(\lambda^2)+\lambda q_-(\lambda^2)$。当 $n=2m+1$ 时,$\deg q_+(\lambda)=\deg q_-(\lambda)=m$;当 $n=2m$ 时,$\deg q_+(\lambda)=m,\deg q_-(\lambda)=m-1$。

定理 1[1]　设 $q(\lambda)$ 是一个 n 次首一多项式,则以下条件等价:1)$q(\lambda)$ 是一个稳定多项式;2)$\boldsymbol{B}(q_+,q_-)$ 和 $\boldsymbol{B}(\lambda q_-,q_+)$ 正定;3)q_+ 与 q_- 形成一个正对;4)$\boldsymbol{B}(q_+,q_-)$ 正定且所有系数 $q_i>0$。

证明　关于式(1)与(2)的等价性见文[1],以下证明式(2),(3)和(4)等价。

式(2)⇒式(3)。设 $\boldsymbol{B}(q_+,q_-)$ 正定,任取 q_+ 的根 λ,λ 也是 $\boldsymbol{C}_{q_+}$ 的特征值,设对应特征向量为 x,即 $\boldsymbol{C}_{q_+}x=\lambda x$,两边同乘以 $\boldsymbol{B}(q_+,q_-)$ 并取内积,有

$$x^*\boldsymbol{B}(q_+,q_-)\boldsymbol{C}_{q_+}x=\lambda x^*\boldsymbol{B}(q_+,q_-)x \tag{5}$$

其中 x^* 表示共轭转置;$\boldsymbol{B}(q_+,q_-)$ 正定及 $x\neq0$ 表明 $x^*\boldsymbol{B}(q_+,q_-)x>0$,而式(2)和(3)表明 $\boldsymbol{B}(q_+,q_-)\boldsymbol{C}_{q_+}$ 是实对称矩阵,从而式(5)左边是实数,因而 λ 必为实数,又 $\boldsymbol{C}_{q_+}$ 为循环矩阵,λ 必为单根,即 q_+ 的根为实单根,排序如下:

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_m$$

同理,由 $\boldsymbol{B}(\lambda q_-,q_+)$ 正定可得 $\lambda q_-(\lambda)$ 的根从而 q_- 的根也为实单根,排列如下:

$$\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_{m-1},n=2m$$

$$\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_m,n=2m+1$$

当 $n=2m$ 时,由推论 1,$\boldsymbol{B}(q_+,q_-)$ 相合于对角阵 $\mathrm{diag}(r_1,r_2,\cdots,r_m)$,其中

$$r_i=q'_+(\lambda_i)q_-(\lambda_i) \tag{6}$$

由 $\boldsymbol{B}(q_+,q_-)$ 正定有 $r_i>0,i=1,2,\cdots,m$。同理,$\boldsymbol{B}(\lambda q_-,q_+)=-\boldsymbol{B}(q_+,\lambda q_-)$ 也相合于对角阵 $\mathrm{diag}(S_1,\cdots,S_m)$,其中

$$S_i=-\lambda_i q'_+(\lambda_i)q_-(\lambda_i)\text{且}S_i>0 \tag{7}$$

式(6)和(7)表明 $S_i=-\lambda_i r_i$,从而 $\lambda_i=-S_i/r_i<0(i=1,2,\cdots,m)$;另外,由 λ_i 都是单根,$q'_+(\lambda_i)$ 的符号必正、负交替变化,$r_i>0$ 表明 $q_-(\lambda_i)$ 的符号也必交替变化,由零点存在定理,相邻两个 λ_i 之间恰有 q_- 的一个根,从而 λ_i 与 μ_i 正好交错排列:

$$\lambda_1<\mu_1<\lambda_2<\cdots<\mu_{m-1}<\lambda_m<0$$

即 q_+ 与 q_- 是一个正对。

当 $n=2m+1$ 时,$\deg q_+=\deg q_-=m$,此时 $\boldsymbol{B}(q_+,q_-)$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}(\lambda q_-,q_+)$ 为 $m+1$ 阶方阵。类似于 $n=2m$ 的情形,考虑 q_- 的根 μ_i,有 $\boldsymbol{B}(q_+,q_-)=-\boldsymbol{B}(q_-,q_+)$ 相合于对角阵 $\mathrm{diag}(r_1,\cdots,r_m)$,$r_i=-q'_-(\mu_i)q_+(\mu_i)$ 且 $r_i>0$。同理,$\boldsymbol{B}(\lambda q_-,q_+)$ 相合于对角阵 $\mathrm{diag}(S_1,\cdots,S_m,S_{m+1})$,$S_i=(\lambda q_-)'q_+|_{\lambda=\mu_i}=\mu_i q'_-(\mu_i)q_+(\mu_i)$,$i=1,2,\cdots,m$,$S_{m+1}=(\lambda q_-)'q_+|_{\lambda=0}=q_-(0)q_+(0)$,且所有 $S_i>0$,从而 $S_i=-\mu_i r_i$,$\mu_i=-S_i/r_i<0$,$i=1,2,\cdots,m$。同样由 $r_i>0$ 及 $q'_-(\mu_i)$ 符号交替

变化可得 μ_i 与 q_+的根 λ_i 交错排列。又

$$r_m = -q'_-(\mu_m)q_+(\mu_m) = -\prod_{i=1}^{m-1}(\mu_m-\mu_i)\prod_{j=1}^{m-1}(\mu_m-\lambda_j)(\mu_m-\lambda_m)>0$$

表明$-(\mu_m-\lambda_m)>0$,即 $\mu_m<\lambda_m$,λ_i 与 μ_i 排列如下:

$$\mu_1<\lambda_1<\mu_2<\lambda_2<\cdots<\mu_m<\lambda_m$$

又

$$q_-(0)=\prod_{i=1}^{m}(0-\mu_i)>0$$

$S_{m+1}=q_-(0)q_+(0)>0$,从而 $q_+(0)>0$,而

$$q_+(\mu_m)=\prod_{j=1}^{m-1}(\mu_m-\lambda_j)(\mu_m-\lambda_m)<0$$

所以 λ_m 作为 q_+的根正好位于 μ_m 与 0 之间,即 $\lambda_m<0$,从而 q_+与 q_-是一个正对。式(2)⇒式(3)正确。反之,如果 q_+与 q_-是一个正对,则当 $n=2m$ 时

$$r_i=\prod_{k=1}^{i-1}(\lambda_i-\lambda_k)\prod_{j=1}^{i-1}(\lambda_i-\mu_j)\prod_{k=i+1}^{m}(\lambda_i-\lambda_k)\prod_{j=i}^{m-1}(\lambda_i-\mu_j)$$

其中共有$(m-i)+[m-1-(i-1)]=2(m-i)$偶数个负因子,所以 $r_i>0$,$\boldsymbol{B}(q_+,q_-)$正定;而 $S_i=-\lambda_i r_i$,$\lambda_i<0$,所以 $S_i>0$,$\boldsymbol{B}(\lambda q_-,q_+)$正定。同理,当 $n=2m+1$ 时,也有 $\boldsymbol{B}(q_+,q_-)$正定,$\boldsymbol{B}(\lambda q_-,q_+)$正定,从而式(3)⇒式(2)正确。

现证明式(2)⇒式(4)。此时因为式(2)与(1)等价,从而 $q(\lambda)$稳定,即 $q(\lambda)$的根或为负实数或实部为负,而 $q(\lambda)$为实系数多项式,其虚根共轭成对出现,又 $q(\lambda)$首一,所以 $q(\lambda)$展开后的系数全为正,所以式(2)⇒式(4)正确。

反之,设 $\boldsymbol{B}(q_+,q_-)$正定,且所有系数 $q_i>0$,与式(2)⇒式(3)类似,当 $n=2m$ 时,q_+的根 λ_i 全为实单根,由 $q_i>0$,有 $q_+(\lambda)$的系数也全为正,这意味着所有 $\lambda_i<0$,而 $r_i=q'_+(\lambda_i)q_-(\lambda_i)>0$,$S_i=-\lambda_i r_i$,所以 $S_i>0(i=1,2,\cdots,m)$,即 $\boldsymbol{B}(\lambda q_-,q_+)$正定。同理,$n=2m+1$ 时,考虑 q_-的根,也有 $\boldsymbol{B}(\lambda q_-,q_+)$正定。式(4)⇒式(2)正确。至于式(3)与(4)等价可由式(2),(3)等价和式(2),(4)等价及传递性推得。定理证毕。

参 考 文 献

1 Lancaster P, Tismenetsky M. The Theory of Matrices. 2nd ed. London: Academic Press, 1985. 454～474

2 Chen Gongning, Yang Zhenghong. Bezoutian representation via Vander Monde matrices. Linear Algebra and Its Appli, 1993, 186: 37～44

3 Helmke U, Fuhrmann P A. Bezoutians. Linear Algebra and its Appli, 1989, 122～124: 1039～1097