

## 非正弦系统广义无功功率及广义功率因数的物理解释<sup>①</sup>

杨明皓<sup>②</sup> 杨仁刚

(中国农业大学电子电力工程学院)

**摘要** 在应用相关技术分析电流电压波形与广义无功功率之间的关系的基础上,提出了电流电压波形相似和波形完全相似的概念,用此概念论证了广义功率因数是电流总体波形与电压总体波形完全相似程度的一种度量,明确了广义无功功率是由于电流总体波形与电压总体波形存在差异所造成的这一物理概念。文中还给出了电流电压波形相似系数和波形完全相似系数的定义式,其中波形相似系数描述了电流波形相对电压波形的非畸变程度和对称程度,波形完全相似系数等价于广义功率因数,表征了系统容量的利用率。

**关键词** 相关分析; 广义无功功率; 广义功率因数

**中图分类号** TM131.43

## Explanation of Generalized Reactive Power and Power Factor in Nonsinusoidal Systems

Yang Minghao Yang Ren'gang

(College of Electronic and Electric Power Engineering, CAU)

**Abstract** The relationships between generalized reactive power and waveforms of voltage and current are analyzed by using the correlation techniques. The concepts of similarity and complete similarity of voltage and current waveforms are proposed. With these concepts it is derived and proved that the generalized power factor is essentially a measure of the difference between voltage and current waveforms, while the reactive power is just the result of this difference. Two characteristic parameters, similarity coefficient and complete similarity coefficient of voltage and current waveforms, are given to evaluate the quality of electric energy. The similarity coefficient characterizes the degree of being distortionless and the symmetry of load current related to voltage source. The complete similarity coefficient is equivalent to the generalized power factor and characterizes the efficiency of power delivery of power systems.

**Key words** correlation analysis; generalized reactive power; generalized power factor

对无功功率的传统物理解释是:“系统中的储能元件与电源之间能量的往复交换而形成无功功率”。在非线性系统中,人们又认识到“在没有储能元件的情况下,由于电流的波形畸变产生高次谐波,这种谐波功率也是无功功率。它的存在将多占系统容量、增加系统损耗、降低设备寿命”。然而,在对称电源系统中,如果电流不对称,同样也多占系统容量、增加系统损耗和降低

收稿日期:1996-06-18

①国家教委出国留学人员基金资助项目

②杨明皓,北京清华东路17号中国农业大学(东校区)62信箱,100083

设备寿命。即同样具有无功功率的特征,所以,研究产生无功功率的机理不在于研究各种负载各自的特性,而在于研究它们的共性。

文献[1]给出了广义功率及广义功率因数的定义,笔者对时域内的广义功率作进一步讨论:应用相关分析技术从单相系统到多相系统分析电流电压波形与广义无功功率之间的关系,给出电流电压波形相似和波形完全相似的概念,用这些概念导出及论证广义无功功率的成因和功率因数的本质,并给出电流电压波形相似系数和波形完全相似系数的时域表达式,它们可以作为评价电力系统供电质量的指标。

## 1 广义功率的定义和性质

文献[1]由 Hilbert 内积空间广义功率和广义功率因数的定义和分析得到以下结论。

有功功率定义为 Hilbert 内积空间的内积

$$P = \langle \mathbf{U}, \mathbf{I} \rangle = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^n \int_{\tau} u_j(t) i_j(t) dt \quad (1)$$

广义无功功率定义为

$$Q = \|\mathbf{U}\| \cdot \|\mathbf{I}_q\| = \|\mathbf{U}\| \cdot \|\mathbf{I}\| \sin\varphi \quad (2)$$

广义功率因数定义为

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{U}, \mathbf{I} \rangle}{\|\mathbf{U}\| \cdot \|\mathbf{I}\|} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{U}, \mathbf{I}$ 分别为内积空间  $n$  维电压向量和电流向量,  $\mathbf{U} = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]^T$ ,  $\mathbf{I} = [i_1(t), i_2(t), \dots, i_n(t)]^T$ ;  $u_j(t), i_j(t)$ 分别为  $n$  相交流系统中第  $j$  相电压和电流;  $\|\mathbf{U}\|$ 和  $\|\mathbf{I}\|$ 分别为电压向量  $\mathbf{U}$  和电流向量  $\mathbf{I}$  的范数。

广义功率因数及电流电压向量的性质有:1)广义功率因数的大小表明电流向量与电压向量的相似程度;2)电流向量与电压向量平行的充要条件是  $\mathbf{I}, \mathbf{U}$  线性相关,  $\mathbf{I}$  与  $\mathbf{U}$  平行时,电流向量全为有功分量,即  $\cos\varphi = 1$ ;3)  $\mathbf{I}$  与  $\mathbf{U}$  垂直时,有  $\langle \mathbf{U}, \mathbf{I} \rangle = 0$ , 所以有功分量为零,电流向量全为无功分量。

## 2 单相系统电压电流波形的相关性与其功率因数的关系

### 2.1 电流电压波形相似和电流电压波形完全相似

为判断  $u(t), i(t)$  两波形的相似性,研究它们的差别函数  $\delta$ , 有

$$\delta = u(t) - ai(t - \tau) \quad (4)$$

式中  $\alpha$  为实常数。根据式(4)给出下面 2 个定义。

**定义 1** 如果存在一个常数  $\alpha$  使  $\delta = 0$ , 即  $u(t) = ai(t - \tau)$ , 则称  $u(t)$  与  $i(t)$  两波形相似。

**定义 2** 如果存在一个常数  $\alpha$ , 当  $\tau = 0$  时使  $\delta = 0$ , 即  $u(t) = ai(t)$ , 则称  $u(t)$  与  $i(t)$  两波形完全相似。

为衡量  $u(t)$  与  $i(t)$  波形之间的差异,引入  $\delta$  的平方时间均值

$$D = \frac{1}{T} \int_{\tau} [u(t) - ai(t - \tau)]^2 dt \quad (5)$$

选择适当的  $\alpha$  使  $D$  最小,令  $\partial D / \partial \alpha = 0$ , 解得

$$\alpha = \left\{ \frac{1}{T} \int_T u(t)i(t-\tau)dt \right\} \left\{ \frac{1}{T} \int_T i^2(t-\tau)dt \right\}^{-1} \quad (6)$$

代入式(5)得

$$\begin{aligned} D_{\min} &= \frac{1}{T} \int_T u^2(t)dt \left\{ 1 - \left[ \frac{1}{T} \int_T u(t)i(t-\tau)dt \right]^2 \left[ \frac{1}{T} \int_T u^2(t)dt \cdot \frac{1}{T} \int_T i^2(t-\tau)dt \right]^{-1} \right\} \\ &= \frac{1}{T} \int_T u^2(t)dt [1 - f_w^2(\tau)] \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $f_w(\tau)$  为  $u(t)$  与  $i(t)$  的相关系数<sup>[2]</sup>, 有

$$f_w(\tau) = \frac{\frac{1}{T} \int_T u(t)i(t-\tau)dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_T u^2(t)dt} \sqrt{\frac{1}{T} \int_T i^2(t-\tau)dt}} = \frac{R_{ui}(\tau)}{\sqrt{R_{uu}(0)} \sqrt{R_{ii}(0)}} \quad (8)$$

式中:  $R_{ui}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T u(t)i(t-\tau)dt$  为电压  $u(t)$  与电流  $i(t)$  的互相关函数;  $R_{uu}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T u(t)u(t-\tau)dt$  为电压  $u(t)$  的自相关函数;  $R_{ii}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T i(t)i(t-\tau)dt$  为  $i(t)$  的自相关函数。

由 Schwartz 不等式可知,  $f_w(\tau) \leq 1$ 。

## 2.2 波形相似系数和波形完全相似系数

2.2.1 波形相似系数  $S_F$  由定义1可知, 当  $|f_w(\tau)| = 1$  时,  $D_{\min} = 0$ , 这时  $u(t) = ai(t-\tau)$ , 即  $u(t)$  与  $i(t)$  波形相似。

对给定的电压电流波形  $u(t)$  和  $i(t)$ , 取不同的  $\tau$  值(即  $u(t)$  与  $i(t)$  相对平移)时, 它们的相关程度不一样, 即相关系数  $f_w(\tau)$  不同, 但是它们的波形相似程度一样。为了描述波形相似程度, 现引入波形相似系数  $S_F$ 。

对于给定的电压电流波形  $u(t)$  和  $i(t)$ , 至少存在一个  $\tau_m$  使  $u, i$  的相关系数达最大值  $f_w(\tau_m)$ 。这个值定义为  $u(t)$  与  $i(t)$  的波形相似系数, 即

$$S_F = \max f_w(\tau) = f_w(\tau_m) = \frac{\frac{1}{T} \int_T u(t)i(t-\tau_m)dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_T u^2(t)dt} \sqrt{\frac{1}{T} \int_T i^2(t-\tau_m)dt}} = \frac{\max R_{ui}(\tau)}{\sqrt{R_{uu}(0)} \sqrt{R_{ii}(0)}} \quad (9)$$

当  $S_F = 1$  时,  $u(t)$  与  $i(t)$  波形相似; 当  $S_F < 1$  时,  $u(t)$  与  $i(t)$  波形不相似(但可能相关); 当  $S_F = 0$  时,  $u(t)$  与  $i(t)$  波形完全不相似。

2.2.2 波形完全相似系数与广义功率因数 由定义2可知,  $u(t)$  与  $i(t)$  波形完全相似的充要条件是  $u(t) = ai(t)$ , 即波形完全相似是在  $\tau = 0$  的情况下考察  $u(t)$  与  $i(t)$  的相关性; 所以, 定义这时的相关系数  $f_w(0)$  为  $u(t)$  与  $i(t)$  的波形完全相似系数, 即

$$f_w(0) = \frac{\frac{1}{T} \int_T u(t)i(t)dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_T u^2(t)dt} \sqrt{\frac{1}{T} \int_T i^2(t)dt}} = \frac{R_{ui}(0)}{\sqrt{R_{uu}(0)} \sqrt{R_{ii}(0)}} \quad (10)$$

当且仅当  $|f_w(0)|=1$  时有  $D_{\min}=0$ , 则  $u(t)=\alpha i(t)$  成立, 即  $u(t)$  与  $i(t)$  的波形完全相似。

另一方面, 对照式(1)可知式(10)的分子为  $U$  与  $I$  的内积, 即有功功率  $P$ ; 由内积空间范数的定义<sup>[1]</sup>, 式(10)的分母为  $U$  与  $I$  的范数之积。所以

$$f_w(0) = \frac{\langle U, I \rangle}{\|U\| \cdot \|I\|} = \cos\varphi = \lambda \quad (11)$$

即波形完全相似系数等于广义功率因数。

若  $f_w(0)=1$ , 则  $u(t)$  与  $i(t)$  的波形完全相似, 这时由式(11)有  $\lambda=1$ , 所以电流全为有功电流; 若  $f_w(0)<1$ , 则  $u(t)$  与  $i(t)$  的波形不完全相似, 这时  $\lambda<1$ , 即电流向量  $I$  在电压向量  $U$  方向上的正交分解所得的无功分量不为零向量<sup>[1]</sup>, 即有无功功率存在。由此可见, 广义功率因数  $\lambda$  实质上是  $u(t)$  与  $i(t)$  波形差异的一种度量, 而无功功率正是这种差异的产物。

2.2.3 波形相似系数和波形完全相似系数的直观解释 应当指出, 当  $\lambda=1$  时必有  $S_F=1$ ; 反之, 当  $S_F=1$  时, 不一定有  $\lambda=1$ 。为了进一步说明波形相似和波形完全相似的概念, 图 1 给出了几种典型的电流电压波形。其中(a)为电流波形与电压波形形状一样且没有相位移, 即波形完全相似; (b)为电流波形与电压波形形状一样但电流波形滞后于电压波形, 即波形相似; (c)和(d)为波形不相似: (c)情况下的波形不相似是由电流波形畸变和滞后造成的, (d)情况下的波形不相似是由电流波形畸变造成的。

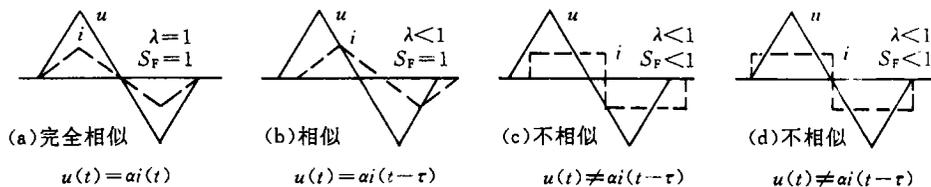


图 1 单相系统电压电流波形的相似性

### 3 多相系统波形相似与波形完全相似的概念

在单相系统分析中得到: 广义功率因数  $\lambda$  是  $u(t)$  与  $i(t)$  波形完全相似程度的度量, 无功功率是由于负载使其电流波形相异于电压波形而产生的。这一结论具有普遍意义, 它适用于多相系统。

#### 3.1 相电流与相电压波形的相关性

设  $n$  相交流系统的相电压和相电流分别为  $u_j(t)$  和  $i_j(t)$  ( $j=1, 2, \dots, n$ )。为考察  $n$  相系统电流与电压波形的总体相似性, 引入波形差别函数

$$\delta = \sum_{j=1}^n [u_j(t) - \alpha i_j(t - \tau)]^2 \quad (12)$$

式中  $\alpha$  为待定系数。  $\delta$  的时间均值为

$$D = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \sum_{j=1}^n [u_j(t) - \alpha i_j(t - \tau)]^2 \right\} dt \quad (13)$$

现求  $D$  的最小值, 令  $\partial D / \partial \alpha = 0$ , 解得

$$\alpha = \left[ \sum_{j=1}^n \int_T u_j(t) i_j(t-\tau) dt \right] \left[ \sum_{j=1}^n \int_T i_j^2(t-\tau) dt \right]^{-1} \quad (14)$$

将式(14)代入(13)得

$$D_{\min} = \frac{1}{T} \int_T \sum_{j=1}^n u_j^2 dt [1 - f_{(u,i)n}(\tau)] \quad (15)$$

式中  $f_{(u,i)n}(\tau)$  为  $n$  相系统电压电流波形的相关系数, 有

$$f_{(u,i)n}(\tau) = \frac{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^n \int_T u_j(t) i_j(t-\tau) dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^n \int_T i_j^2(t-\tau) dt} \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^n \int_T u_j^2(t) dt}} = \frac{R_{(u,i)n}(\tau)}{\sqrt{R_{(i,i)n}(0)} \sqrt{R_{(u,u)n}(0)}} \quad (16)$$

### 3.2 波形相似系数和波形完全相似系数

同单相系统一样,  $n$  相系统电流电压波形相似系数定义为其相关系数的最大值

$$S_F = \max f_{(u,i)n}(\tau) = f_{(u,i)n}(\tau_m) = \frac{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^n \int_T u_j(t) i_j(t-\tau_m) dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^n \int_T i_j^2(t-\tau_m) dt} \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^n \int_T u_j^2(t) dt}} = \frac{R_{(u,i)n}(\tau_m)}{\sqrt{R_{(i,i)n}(0)} \sqrt{R_{(u,u)n}(0)}} \quad (17)$$

$n$  相系统波形完全相似系数定义为  $\tau=0$  时的相关系数

$$f_{(u,i)n}(0) = \frac{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^n \int_T u_j(t) i_j(t) dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^n \int_T i_j^2(t) dt} \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^n \int_T u_j^2(t) dt}} = \frac{R_{(u,i)n}(0)}{\sqrt{R_{(i,i)n}(0)} \sqrt{R_{(u,u)n}(0)}} \quad (18)$$

由式(1)及内积空间范数的定义, 有

$$f_{(u,i)n}(0) = \frac{\langle \mathbf{U}, \mathbf{I} \rangle}{\|\mathbf{U}\| \cdot \|\mathbf{I}\|} = \cos \varphi = \lambda \quad (19)$$

同单相系统一样, 波形完全相似系数就是广义功率因数。

### 3.3 波形相似系数和完全相似系数的讨论

在多相系统中, 若完全相似系数  $f_{(u,i)n}(0) = 1$ , 即  $\lambda = 1$ , 由式(12)~(15)则

$$i_j(t) = K u_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (20)$$

成立。式中  $K$  为常数, 式(20)表明, 多相系统的广义功率因数  $\lambda=1$  时, 各相电流与相电压成比例, 且比例系数相同, 也就是说, 多相系统电流与电压波形完全相似是总体相似而不是部分相似。

当负载有功功率一定时, 如果系统的广义功率因数  $\lambda=1$ , 则由式(20)所表示的一组系统相电流为最小相电流组(证明见附录)。

波形完全相似系数的这一特性表明, 以广义功率因数  $\lambda=1$  作为补偿目标进行广义无功补偿, 将使系统各相电流有效值的平方和最小, 也就是系统损耗最小, 占用发电输电容量最小。

与单相系统相同, 若  $n$  相系统的波形完全相似系数  $\lambda=1$ , 则波形相似系数  $S_F=1$ , 反之不

然。

在多相系统中,波形相似系数  $S_F=1$  的条件是:1)各相电流波形与该相电压波形的形状相同,即相电流波形与相电压波形成比例;2)各相电流波形与相电压波形的相对位移相同,即相位差相同。为了说明多相系统波形相似与波形完全相似概念的差别,现分析以下几种负载条件下的  $\lambda$  和  $S_F$ 。

设电源电压为三相正弦对称,负载为三相对称纯感性负载,这时各相电流波形与该相电压波形成比例,且具有相同的相位差,即电流电压波形总体相似, $S_F=1$ ;但是,三相电流总体波形滞后于电压总体波形, $\lambda<1$  即不是完全相似,系统中有广义无功功率存在。

设电源电压为三相正弦对称,负载为三相不对称纯电阻性负载,这时相电流是正弦,但不对称,电流电压波形总体不相似, $S_F<1$ ,且  $\lambda<1$ ,即由于负载的不对称引起电流波形与电压波形总体不相似,这时系统有广义无功功率存在。

设电源电压为三相正弦对称,负载为非线性的或周期性时变的,这时电流波形相对电压波形畸变, $S_F<1$ ,且  $\lambda<1$ ,即有广义无功功率存在。

由此可以看出,在多相系统中  $S_F$  不仅描述了电流波形相对电压波形的非畸变程度,同时也表征了负载电流相对电源电压的对称程度,因而可以作为衡量电能质量的一种指标。

## 4 结 论

所提出的电流电压波形相似和波形完全相似的概念揭示了广义无功功率存在的本质,即电流总体波形与电压总体波形存在差异。文中论证了对所定义的广义无功功率进行完全补偿使广义功率因数  $\lambda=1$ ,将使系统各相电流有效值的平方和最小。其工程意义是系统损耗最小、占用发电和输电容量最小,从而说明了广义无功功率定义的合理性。

电流电压波形相似系数和波形完全相似系数可以作为衡量供电质量的 2 个指示。其中波形相似系数  $S_F$  是电流波形相对电压波形的非畸变程度和对称程度的一种度量,而波形完全相似系数就是广义功率因数  $\lambda$ ,它是电流总体波形与电压总体波形完全相似程度的一种度量,表征了输电系统容量的利用率。

## 参 考 文 献

- 1 杨仁刚,唐统一,孙树勤.非正弦电路广义功率和特征参数的定义.中国农业大学学报,1996,1(4):75~79
- 2 林恩 P A 著.信号分析与处理导论.刘庆普,沈允春译.北京:宇航出版社,1990.153~162
- 3 柳重堪.应用范函分析.北京:国防工业出版社,1986.158~174

## 附 录

当负载有功功率一定时,如果系统的广义功率因数  $\lambda=1$ ,则由式(20)所表示的一组系统相电流为最小相电流组的证明。

在广义无功补偿等值网络中,设  $L$  为负载, $C$  为补偿器, $i_{Sj}$ , $i_{Cj}$ 和  $i_{Lj}$ 分别表示第  $j$  相的系统电流、补偿电流和负载电流。若负载一定,则有一组确定的负载电流  $i_{Lj}(j=1,2,\dots,n)$ 。补偿器对这组确定的负载电流提供不同的补偿电流时,将得到不同的系统相电流组。下面证明,其中

至少存在一组使系统相电流有效值的平方和最小的相电流组。称这样的相电流组为最小相电流组。这一问题的数学表示如下:

$$\text{目标函数} \quad J(i_{s_1}, i_{s_2}, \dots, i_{s_n}) = \frac{1}{T} \int_T \sum_{j=1}^n i_{s_j}^2(t) dt = \sum_{j=1}^n I_{s_j}^2 \quad (\text{A1})$$

$$\text{约束条件} \quad P = \frac{1}{T} \int_T \sum_{j=1}^n u_j(t) i_{s_j}(t) dt \quad (\text{A2})$$

这是一个求式(A1)和(A2)的范函条件极值的问题<sup>[3]</sup>。

作上述范函条件极值问题的拉格朗日范函

$$\tilde{F} = \sum_{j=1}^n i_{s_j}^2(t) + \lambda' \sum_{j=1}^n u_j(t) i_{s_j}(t) \quad (\text{A3})$$

尤拉方程组为

$$2i_s + \lambda' u = 0 \quad (\text{A4})$$

式中:  $i_s = [i_{s_1}, i_{s_2}, \dots, i_{s_n}]$ ,  $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ 。解得

$$i_s = -\frac{\lambda'}{2} u \quad (\text{A5})$$

将式(A5)代入(A2),有

$$P = -\frac{\lambda'}{2T} \int_T \sum_{j=1}^n u_j^2 dt = -\frac{\lambda'}{2} \sum_{j=1}^n U_j^2 \quad (\text{A6})$$

所以

$$\lambda' = -\frac{2P}{\sum_{j=1}^n U_j^2} \quad (\text{A7})$$

将式(A7)代入(A5),得到最小相电流组

$$i_s = \frac{P}{\sum_{j=1}^n U_j^2} u \quad (\text{A8})$$

即

$$i_{s_j} = \frac{P}{\sum_{j=1}^n U_j^2} u_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (\text{A9})$$

令  $K = \frac{P}{\sum_{j=1}^n U_j^2}$ , 即得到式(20)。