

## 圆形筒仓的弹性和塑性极限载荷<sup>①</sup>

黄文彬<sup>②</sup> 曾 丁

(中国农业大学工程基础科学部)

**摘 要** 针对承受 Janssen 形式的分布压力和摩擦力作用的圆形筒仓,在扩大结构参数范围的条件下求得了弹性和塑性极限载荷,并对完全解的条件作了校核。

**关键词** 筒仓; Janssen 公式; 弹性和塑性极限载荷; 完全解

**中图分类号** O344.5

## Elastic and Plastic Limit Loads of Circular Silos

Huang Wenbin Zeng Ding

(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

**Abstract** The elastic and plastic limit loads of circular silos are studied. The pressures and frictional forces on the wall of the silos are calculated according to Janssen formula. The limit loads are calculated under a larger range of structure parameter. The condition of complete solution is checked.

**Key words** silo; Janssen formula; elastic and plastic limit loads; complete solution

圆形柱壳受载的塑性极限分析较早的如文[1~3],近期针对筒仓的分析如文[4,5]。笔者在文[5]的基础上,进一步扩大了解的结构参数范围,对刚性区应力作了校核以确定完全解的条件;为了便于比较,也给出了弹性极限载荷。

### 1 基本方程

考虑图 1 所示的圆柱壳:底部固定,筒内装有密度为  $\gamma/g$  的物料;筒高  $H$ ,半径  $r$ ,壁厚  $t$ ;壁材料屈服极限为  $\sigma_s$ ,壁与物料之间的摩擦因数为  $\mu$ 。如仓壁压力用 Janssen 公式表示,则有

$$p(z) = \frac{r\gamma/g}{2\mu} [1 - \exp(-2k\mu z/r)]$$

式中  $k$  为侧压系数, $z$  轴朝下为正,原点取在上表面。这时向下摩擦力为

$$q(z) = \mu p(z)$$

壁的膜力用  $N_z, N_\varphi$  表示,弯矩用  $M_z, M_\varphi$  表示。这时可得平衡方程和  $N_z$  表达式

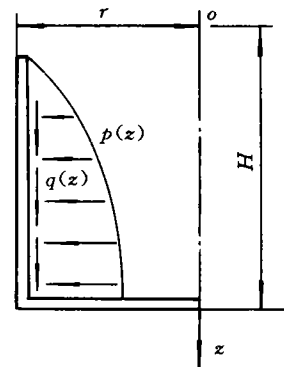


图 1 筒仓示意图

收稿日期:1996-07-28

①国家自然科学基金资助项目

②黄文彬,北京清华东路 17 号中国农业大学(东校区)75 信箱,100083

$$\frac{d^2 M_z}{dz^2} + \frac{N_\varphi}{r} = p(z) \quad (1)$$

$$N_z = - \int_0^z q(z) dz < 0 \quad (2)$$

记  $M_s$  为极限弯矩,  $N_s$  为极限膜力, 有  $M_s = \sigma_s t^2 / 4$ ,  $N_s = \sigma_s t$ . 引进下列量纲一的量更为方便:  $x = z/H$ ,  $n_x = N_z/N_s$ ,  $n_\varphi = N_\varphi/N_s$ ,  $m_x = M_z/M_s$ ,  $\mu = \mu' H/r$ ,  $\rho = 2k\mu$ ,  $p_0 = \gamma r^2 / (2\mu' N_s)$ ,  $c^2 = N_s H^2 / (M_s r)$ . 这时式(1)变为

$$\frac{d^2 m_x}{dx^2} = c^2 [1 - \exp(-\rho x) - n_\varphi] \quad (3)$$

式(2)变为  $n_x = -\mu p_0 \{x - [1 - \exp(-\rho x)]/\rho\} < 0$ .

## 2 弹性极限载荷

### 2.1 无矩解

不考虑弯矩, 由式(3)得  $n_\varphi = [1 - \exp(-\rho x)] \geq 0$ . 由于  $n_\varphi \geq 0$ ,  $n_x \leq 0$ , 弹性极限载荷由下式确定:  $\max(n_\varphi - n_x) = (n_\varphi - n_x)|_{x=1} = 1$ . 将对应的  $p_0$  记为  $p_{01}$ , 有

$$p_{01} = \{(1 - \mu/\rho)[1 - \exp(-\rho)] + \mu\}^{-1} \quad (4)$$

注意到  $\mu = \mu' H/r$ ,  $\rho = 2k\mu \leq 2\mu$ , 可以取表 1 的  $\mu, \rho$  值作为代表并给出相应的  $p_{01}$  值.

表 1 不同  $\mu, \rho$  时的无矩弹性极限载荷  $p_{01}$

$\mu$	1	1	2	2	2
$\rho$	1	2	1	2	3
$p_{01}$	1	0.698	0.731	0.500	0.432

### 2.2 有矩解

现按文[6]的公式, 这时把原点取在底部,  $z$  轴朝上更为方便. 如不考虑两端边界效应的相互影响, 则挠度  $w$  的表达式为

$$w = \frac{r^2}{Et} p(z) + \exp(-\beta z) (c_3 \cos \beta z + c_4 \sin \beta z)$$

式中

$$\beta = [3(1 - \nu^2)]^{1/4} (rt)^{-1/2} = \alpha (rt)^{-1/2}$$

其中  $\nu$  为泊松比. 由  $z=0$  处  $w=w'=0$  边条件可得  $c_3 = -(r^2/Et)p(0)$  和  $c_4 = c_3 - (r^2/Et\beta) \cdot p'(0)$ . 最大曲率在  $x=0$  处, 得

$$w''(0) = \frac{r\sigma_s}{E} \left\{ - \left( \frac{\rho}{H} \right) \exp(-\rho) - \frac{2\alpha^2}{rt} \left[ \frac{(rt)^{1/2}}{H\alpha} \exp(-\rho) - 1 + \exp(-\rho) \right] \right\}$$

考虑到  $r, H$  比  $t$  大得多, 可近似得

$$w''(0) = \frac{2\alpha^2 \sigma_s}{Et} [1 - \exp(-\rho)]$$

最大弯矩为  $M_z(0) = Dw''(0)$ , 而  $D = Et^3/4\alpha^4$ , 由此得

$$M_z(0) = \frac{2p_0}{\alpha^2} \left( \frac{\sigma_s t^2}{4} \right) [1 - \exp(-\rho)]$$

对应的量纲一的量为

$$m_x(0) = \frac{2p_0}{\alpha^2} [1 - \exp(-\rho)]$$

弯矩的影响主要是  $m_x$ , 因此有矩时的弹性极限载荷由下式确定:  $m_x(0) - n_x(0) = 1$ 。对应的  $p_0$  值记为  $p_{02}$ , 其表达式为

$$p_{02} = \left\{ [1 - \exp(1 - \rho)] \left[ \frac{2}{\alpha^2} - \frac{\mu}{\rho} \right] + \mu \right\}^{-1}$$

当取  $\nu = 0.3$  时, 不同  $\mu, \rho$  时的  $p_{02}$  值如表 2 所示。

表 2 不同  $\mu, \rho$  时的有矩弹性极限载荷  $p_{02}$

$\mu$	1	1	2	2	2
$\rho$	1	2	1	2	3
$p_{02}$	0.883	0.690	0.666	0.469	0.427

### 3 塑性极限载荷

文[5]在分析筒仓的塑性极限载荷时用的是单矩屈服条件

$$\max \{ |n_x|, |n_\varphi|, |n_x - n_\varphi|, |m_x| \} = 1 \quad (5)$$

当  $c^2$  增大(例如  $c^2 \geq 100$ )时破损机构将如图 2 所示, 其中  $DC$  段是刚性区,  $CBA$  段变成  $CB'A$ 。文[5]中给出的  $c^2$  值还不够大, 我们可以初步估计一下常用筒仓  $c^2$  值的大致量级。设取  $p_0 = 1$ , 则  $t = \gamma r^2 / (2\mu' \sigma_s)$ , 由此得  $c^2 = 8\mu' (H/r)^2 \sigma_s / \gamma r$ 。设筒材为钢, 装有密度为 2 的物料, 取  $\sigma_s = 0.2$  MPa,  $\gamma = 2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ,  $r = 100 \text{ cm}$ ,  $(H/r)^2 = 10$ ,  $\mu' = 0.25$ , 则得  $c^2 = 2 \times 10^5$ 。显然  $c^2$  的值很大。要使  $c^2$  的值小, 则需  $\sigma_s$  和  $\mu'$  小而  $r$  和  $\gamma$  增大, 因此这里将  $c^2$  的范围扩大为  $10^2 \sim 10^7$  (即  $\log_{10} c^2$  从 2 到 7)。

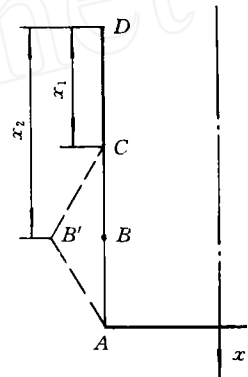


图 2 筒仓破损机构

#### 3.1 $c^2$ 取大值时的塑性极限载荷

对于图 2 所示的破损机构, 满足式(5)的  $n_\varphi - n_x = 1$  条件, 代入式(3)可积分求得

$$m_x = c^2 \left[ A \frac{p_0}{\rho^2} \exp(-\rho x) - \frac{1}{2} (A p_0 + 1) x^2 + \frac{1}{6} \mu p_0 x^3 + c_1 x + D_1 \right]$$

式中  $A = \mu / \rho - 1$ 。由边条件  $m_x|_{x=x_1} = 1, m_x|_{x=x_1} = -1, m_x|_{x=x_2} = 1, m'_x|_{x=x_1} = 0, m'_x|_{x=x_2} = 0$  可得如下 5 个非线性方程:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= a_{11} p_0 + c_1 + d_1 - 0.5 - \frac{1}{c^2} = 0 \\ f_2 &= a_{21} p_0 - 0.5 x_1^2 + c_1 x_1 + d_1 + \frac{1}{c^2} = 0 \\ f_3 &= a_{31} p_0 - 0.5 x_2^2 + c_1 x_2 + d_1 - \frac{1}{c^2} = 0 \\ f_4 &= a_{41} p_0 - x_1 + c_1 = 0 \\ f_5 &= a_{51} p_0 - x_2 + c_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{A}{\rho^2} \exp(-\rho) - \frac{A}{2} + \frac{\mu}{6} \\ a_{21} &= \frac{A}{\rho^2} \exp(-\rho x_1) - \frac{A}{2} x_1^2 + \frac{\mu}{6} x_1^3 \end{aligned}$$

$$a_{31} = \frac{A}{\rho^2} \exp(-\rho x_2) - \frac{A}{2} x_2^2 + \frac{\mu}{6} x_2^3$$

$$a_{41} = -\frac{A}{\rho} \exp(-\rho x_1) - A x_1 + \frac{\mu}{2} x_1^2$$

$$a_{51} = -\frac{A}{\rho} \exp(-\rho x_2) - A x_2 + \frac{\mu}{2} x_2^2$$

可以用 mathematica 软件直接求解非线性方程组, 此时要用下列语句:

Find Root[{ $f_1 = 0, \dots, f_5 = 0$ }, { $p_0, p_{00}$ }, { $x_1, x_{10}$ }, { $x_2, x_{20}$ }, { $c_1, c_{10}$ }, { $d_1, d_{10}$ }]

式中的  $f_1 = 0$ , 即把式(6)的内容直接写入。 $p_{00}, x_{10}, x_{20}, c_{10}, d_{10}$  为选用的初值。该语句用牛顿迭代法求解, 要求在迭代 15 次以内使误差

$$\epsilon = \sum_{i=1}^5 f_i^2 < 10^{-7}$$

才算收敛, 否则就要调整初值重算。计算时先将  $\mu, \rho$  值固定, 改变  $c^2$  值, 只要求得一个收敛解就可改变  $c^2$  值。将上次求得的收敛值作些小变动作为新解的初值, 就能顺利算下去。图 3 示出计算结果。可以看出, 随着  $c^2$  的增大,  $p_0$  值减小, 塑性区也逐渐变小。 $\mu$  和  $\rho$  的增大都能使  $p_0$  值减小。

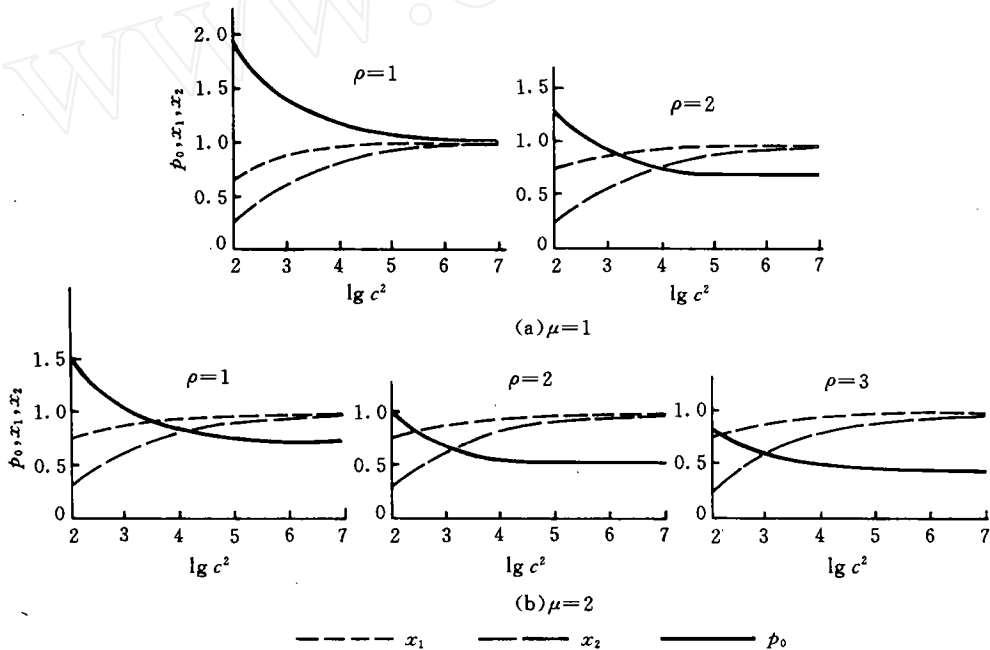


图 3  $\mu, \rho$  不同时  $p_0, x_1$  和  $x_2$  随  $c^2$  的变化趋势

### 3.2 $c^2 \rightarrow \infty$ 时的渐近解

从图 3 看出, 当  $c^2$  很大时,  $x_1 \rightarrow 1, x_2 \rightarrow 1$ , 筒壳将趋向无矩状态; 因此  $p_0$  趋向式(4)的  $p_{01}$ 。代入式(6)可得  $c_1, d_1$  的渐近值。

$$c_1 = \left\{ \left( \frac{\mu}{\rho} - 1 \right) \left[ \frac{\exp(-\rho)}{\rho} + 1 \right] - \frac{\mu}{2} \right\} p_0 + 1$$

$$d_1 = -0.5 - \left\{ \left( \frac{\mu}{\rho} - 1 \right) \left[ \exp(-\rho) \left( \frac{1+\rho}{\rho^2} \right) + 0.5 \right] - \frac{\mu}{3} \right\} p_0$$

不同  $\mu, \rho$  时的  $c_1, d_1$  渐近值如表 3 所示。

表 3 不同  $\mu, \rho$  时的  $c_1, d_1$  渐近值

$\mu$	1	1	2	2	2
$\rho$	1	2	1	2	3
$c_1$	0.5	0.278	1.269	0.5	0.422
$d_1$	-1/6	-0.057	-0.916	-1/6	-0.137

#### 4 刚性区的校核

如不校核刚性区的应力, 则给出的结果只是上限; 如能找到刚性区的应力满足平衡条件和边界条件及不违反屈服条件, 则所得结果为完全解。下面具体给出这个条件, 即  $m_x, n_\varphi$  要满足式(3), 边界条件为

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ 处 } m_x=0, m'_x=0 \\ x=x_2 \text{ 处 } m_x=1, m'_x=0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

屈服条件为

$$|m_x| \leq 1, |n_\varphi - n_x| \leq 1 \quad (8)$$

今构造  $m_x$  如下:

$$m_x = \frac{1}{2} \left\{ \sin \left[ \left( \frac{3}{2} + \frac{x}{x_2} \right) \pi \right] + 1 \right\}$$

它满足式(7)及(8)的  $|m_x| \leq 1$  条件。将它代入式(3)得

$$m_x'' = -\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{x_2} \right)^2 \sin \left[ \left( \frac{3}{2} + \frac{x}{x_2} \right) \pi \right] = c^2 \{ p_0 [1 - \exp(1 - \rho x)] - n_\varphi \}$$

由此得

$$n_\varphi = p_0 [1 - \exp(-\rho x)] + \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\pi}{x_2} \right)^2 \sin \left[ \left( \frac{3}{2} + \frac{x}{x_2} \right) \pi \right]$$

由于  $c^2$  值非常大, 完全可近似为  $n_\varphi \approx p_0 [1 - \exp(-\rho x)]$ 。最后只剩下式(8)的  $|n_\varphi - n_x| \leq 1$  条件, 即  $\max(n_\varphi - n_x) = (n_\varphi - n_x)|_{x=x_2} \leq 1$ 。由此得出

$$p_0 \leq \left\{ 1 - \exp(-\rho x_2) + \mu \left[ 1 - \frac{1}{\rho} (1 - \exp(-\rho x_2)) \right] \right\}^{-1} = p_0^*$$

如能证明  $p_0 \leq p_0^*$  条件成立, 则刚性区的条件就算满足。

从图 4 看出这个条件得到满足, 因此图 3 给出的  $p_0$  是完全解。

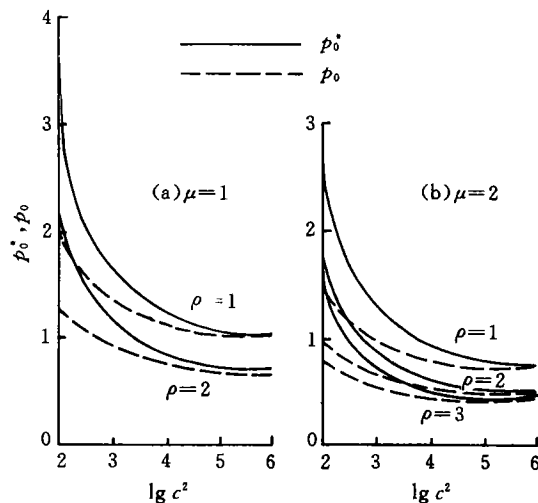


图 4  $\mu, \rho$  不同时的  $p_0^*$  与  $p_0$  曲线

## 5 结 语

$c^2 \rightarrow \infty$ 时,  $p_0$  趋向于无矩时的弹性极限载荷  $p_{01}$ 。随着  $c^2$  值的减小  $p_0$  值将比  $p_{01}$  值大, 但只有在  $c^2$  较小时  $p_0$  的提高才明显; 因此设计规范以无矩解作为计算基础, 是有其合理性的。

### 参 考 文 献

- 1 钱令希. 关于壳体的极限承载能力. 力学学报, 1962, 5(2): 67~100
- 2 Save M A, Massonnet C E. Plastic Analysis and Design of Plate, Shells and Disks. Amsterdam: NHPC, 1972. 413~421
- 3 徐秉业, 刘信声. 结构塑性极限分析. 北京: 中国建筑工业出版社, 1985. 268~280
- 4 华云龙, 冯云田. 浅筒仓的塑性极限分析. 北京农业工程大学学报, 1993, 13(1): 103~110
- 5 华云龙, 冯云田. 圆形筒仓的塑性极限载荷. 工程力学, 1994, 11(3): 115~120
- 6 黄克智. 板壳理论. 北京: 清华大学出版社, 1987. 202~213