

利用快速卷积近似计算连续卷积的几种格式^①

陈奎孚^② 张森文

(中国农业大学工程基础科学部)

摘要 利用快速卷积来近似计算随机响应中卷积计算,给出了矩形法、梯形法和抛物线形法3种格式。比较了直接法和快速卷积法的计算量。结果表明计算速度可提高1个数量级。

关键词 结构动力学; 快速卷积; 数值积分

中图分类号 O324

Schemes to Approximate Continuous Convolution by Fast Convolution

Chen Kuifu Zhang Senwen

(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Abstract The fast convolution is used to approximate random response, three schemes involving rectangular, trapezium and Simpson' rule are proposed. The calculation times are compared between direct method and fast method, and the result shows that the computing speed of the new algorithms may be faster 10 times than that of the old one.

Key words structure dynamics; fast convolution; numerical integration

在研究结构随机瞬态响应问题时,需要大量计算卷积^[1]

$$x(t) = \int_0^t h(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (t \in [0, T]) \quad (1)$$

式中: $h(t)$ 是脉冲响应函数,由系统决定,可由实际测量或计算得到; $f(t)$ 是输入; $x(t)$ 为系统的响应。一般采用数值方法来近似计算式(1),笔者将传统的快速卷积加以改造来进行近似计算,可大大缩短计算时间,并且有可能使随机瞬态响应计算实用化。

1 矩形法格式与快速卷积

在 $[0, T]$ 区间内等间隔取样,取样间隔 $\Delta T = T/N$,记 $h_k = h(k\Delta T)$, $f_k = f(k\Delta T)$ 。这里只求取样点处的响应,记 $x_i = x(i\Delta T)$ 。如果采用矩形积分公式,则 x_i 可近似为

$$x_i = \Delta T \sum_{k=0}^{i-1} h_k f_{i-k} \quad (2)$$

式中求和部分记为 y_i ,即

收稿日期:1996-06-12

①国家自然科学基金资助项目

②陈奎孚,北京清华东路17号中国农业大学(东校区)74信箱,100083

$$y_l = \sum_{k=0}^{l-1} h_k f_{l-k} \quad (3)$$

直接计算 y_0, y_1, \dots, y_N 的 $N+1$ 个 y_l 值需要 $N(N+1)/2$ 个乘法, 在随机瞬态响应中需大量计算式(3), 几乎占据了现有算法的 90% 计算量, 而现有的算法即使对于一个八自由度系统也需几十分钟^[2]。欲实用化, 必须寻找式(3)的快速算法。

在信号处理中, 对于线性卷积^[3,4]

$$g_l = \sum_{k=0}^l h_k f_{l-k} \quad (l=0, 1, \dots, N) \quad (4)$$

可用快算卷积完成, 过程如下。

1) 取 L 为不小于 $2N$ 的 2 的整数次幂整数 (即 $L=2^p$, p 为整数), 将 N 点的 h_k, f_k 补零成 L 点序列。

2) 计算

$$H_l = \sum_{k=0}^{L-1} h_k \exp[-j(2\pi/L)kl] \quad (l=0, 1, \dots, L-1) \quad (5)$$

$$F_l = \sum_{k=0}^{L-1} f_k \exp[-j(2\pi/L)kl] \quad (l=0, 1, \dots, L-1) \quad (6)$$

式(5), (6)由 L 点基 2 的 FFT 完成。

3) 计算 $H_l F_l$ 序列的 L 点逆变换, 即

$$g_l = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} H_k F_k \exp[j(2\pi/L)kl] \quad (7)$$

这仍由 L 点基 2 的逆 FFT 完成, 取前 $N+1$ 个 g_l 即是式(4)要求的 g_l 。

式(3)与式(4)略有差别, 要使用快速卷积必须对式(3)作改造。可选如下 2 个方案:

方案 1 将式(3)写成

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_{l+1} &= \sum_{k=0}^l h_k f_{l+1-k} \quad (l=0, 1, \dots, N-1) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(8)的后一个式子可用快速卷积来计算 (注意 $g_l \neq y_{l+1}$)。

方案 2 将式(3)写成

$$y_l = \sum_{k=0}^l h_k f_{l-k} - h_l f_0 = g_l - h_l f_0 \quad (l=0, 1, \dots, N) \quad (9)$$

式中 g_l 由快速卷积计算。

2 梯形格式与抛物线形格式

式(2)的矩形积分精度太低。对于数值积分, 常用的格式为梯形格式和抛物线形格式。

对于梯形法, 式(1)应近似为

$$x_l = \Delta T \left[\frac{h_0 f_l + h_l f_0}{2} + \sum_{k=1}^{l-1} h_k f_{l-k} \right] \quad (l=0, 1, \dots, N) \quad (10)$$

中括号中部分仍记为 y_l , 即

$$y_l = (h_0 f_l + h_l f_0)/2 + \sum_{k=1}^{l-1} h_k f_{l-k} \quad (11)$$

$$x_i = \Delta T y_i \quad (10')$$

式(11)可改为

$$y_i = \sum_{k=0}^i h_k f_{i-k} - (h_0 f_i + h_i f_0) / 2 \quad (12)$$

或

$$y_i = \sum_{k=0}^{i-1} h_k f_{i-k} + (h_i f_0 - h_0 f_i) / 2 \quad (13)$$

式(12)和(13)中的求和均可采用快速卷积计算。

对于抛物线型法,情形稍复杂。抛物线型积分公式取样区间只能为偶数,当 $l=2p$ (p 为整数)时

$$y_i = y_{2p} = \frac{1}{3} (f_0 h_i + f_i h_0) + \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\frac{l}{2}-1} f_{2k+1} h_{i-2k-1} + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\frac{l}{2}-1} f_{2k} h_{i-2k} \quad (14)$$

式(14)的 2 个求和号内是 $l/2$ 长序列卷积,原则上可采用前述的卷积方案来计算,但是这样做不易求得 l 为奇数时的结果。如果定义新序列

$$r_k = \begin{cases} \frac{2}{3} f_k & (k \text{ 为偶数}) \\ \frac{4}{3} f_k & (k \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (15)$$

令

$$g_i = \sum_{k=0}^i r_k h_{i-k} \quad (16)$$

则式(14)的 y_i 可表示为

$$y_i = g_i - \frac{1}{3} (f_0 h_i + f_i h_0) \quad (17)$$

以上是 l 为偶数时的情形。当 $l=2p+1$ 时,共有 $2p+1$ 个区间,前 $2p$ 个区间可使用抛物线型积分公式,后一个区间用梯形公式,则

$$y_i = \frac{f_0 h_i + f_i h_0}{3} + \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{p-1} f_{2k+1} h_{i-2k-1} + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{p-1} f_{2k} h_{i-2k} + \frac{f_{i-1} h_1 + f_1 h_{i-1}}{2} \quad (18)$$

比较式(16)与式(18)可得

$$y_i = g_i + \frac{1}{6} f_{i-1} h_1 - \frac{5}{6} f_i h_0 - \frac{1}{3} f_0 h_i \quad (19)$$

由快速卷积计算出式(16)的 g_i ,就可由式(17)和(19)校正出 y_i 来,从而由式(10')得到 x_i 。

3 运算量分析

为了讨论方便,设 N 为 2 的整数次幂,这样 $L=2N$ 。下文只比较矩形法,而梯形法与抛物线型法与此相仿。令直接法运算量为 C_D ,快速方案为 C_F ,二者比值为 K_m 。

情形 1 只计算一次卷积。如前所述

$$C_D = N(N+1)/2 \quad (20)$$

对于快速卷积方案,需计算式(5),(6)和(7)的 3 个 FFT,1 个 FFT 需 $(L/2)\log_2 L + L$ 个乘法,式(7) $H_k F_k$ 需 L 个乘法,再加上修正式(9)的 N 个乘法,故

$$C_F = 3N\log_2 N + 12N \quad (21)$$

故

$$K_m = \frac{N+1}{6\log_2 N + 24} \tag{22}$$

K_m 的数值如表 1 所示。当 N 不是 2 的整数次幂时,效率略有下降,如图 1 所示。由表 1 可表 1 K_m 值 ($L=2N$)

情形	N									
	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096
1	0.214	0.354	0.611	1.08	1.96	3.57	6.58	12.2	22.8	42.7
2	0.333	0.500	0.868	1.55	2.80	5.14	9.50	17.7	33.0	62.1

以看出:当 $N=64$ 时,直接法与快速卷积法运算量差不多; $N>64$ 后,快速卷积法速度快一些,并且随 N 增大,速度快得越多。通常使用的 $N=1 024$,可达 12.2 倍。

有时 f_k, h_k 都是实数,用直接法只需计算实乘,而式(5),(6)和(7)均为复数操作,所以 K_m 有所下降。如果考虑到 h_k, f_k 的实数性质,从而 $H_k F_k = H_{L-k}^* F_{L-k}^*$,则式(5),(6)和(7)的 FFT 可降为 $L/2$ 点,总的复乘数大约下降一半,而每个复乘可用 3 个实乘来表示,所以这时 K_m 约为情形 1 的 2/3。

情形 2 多次计算卷积。

我们常常要对一个系统计算多组激励下的响应,这时不必每次均需计算 H_l ,当激励组数特别多时,可忽略 H_l 的计算量。这样

$$C_F = 2N\log_2 N + 9N \tag{23}$$

从而

$$K_m = \frac{N+1}{4\log_2 N + 18} \tag{24}$$

K_m 的具体数值见表 1。同样,当 N 不恰好是 2 的整数次幂时,效率将略有下降,见图 1。

表 1 中的数据与情形 1 相似,当 $N \geq 64$ 时快速卷积法要快于直接法, K_m 约为情形 1 的 1.5 倍。

梯形法和抛物线法与矩形法的差别仅在于修正计算量的不同,而它在总计算量中占很小部分,所以 K_m 与矩形法相近,不再详细讨论。

4 算 例

算例 1 取 $h(t) = \sin t, f(t) = \exp(-0.01t)$,则 $x(t) = [0.01\sin t - \cos t + \exp(-0.01t)] / 1.0001$,其函数曲线见图 2。对 $h(t)$ 和 $f(t)$ 在 $[0, 5\pi]$ 内离散采样, $\Delta t = 5\pi/256$,即 $N=256$ 。计算误差如图 3 所示。在图 3 中,梯形法的相对误差约为 10^{-3} ,而偶数点时刻抛物线法相对误差为 10^{-7} ,在奇数节点上,由于最后一个区间采用了梯形法,因而精度下降,但总的来说误差

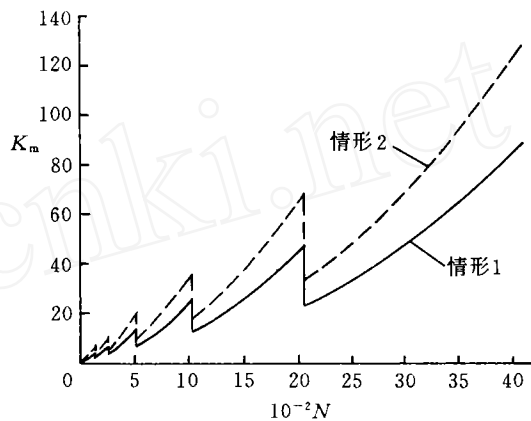


图 1 直接法与快速卷积法计算量的比较

形法高 1~2 个量级精度。除了在 $x(t)$ 的零点附近,抛物线法和梯形法的误差都比较平稳;在 $x(t)$ 的零点,尽管绝对误差很小,但是相对误差由于分母趋于零而表现出波动,此时误差主要由舍入误差引起。注意抛物线方法对于奇节点时的情形,它表现在 $h(t)$ 为零点时误差最小,这显然是因为被积函数的曲率主要由 $h(t)$ 决定(本例中),而在 $h(t)$ 零点时,曲率最小,最接近直线,此时梯形法精度较高。

算例 2 单自由度系统受强迫力的响应:
 $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t)$ 。取 $m=1, k=1, c=0.2$,

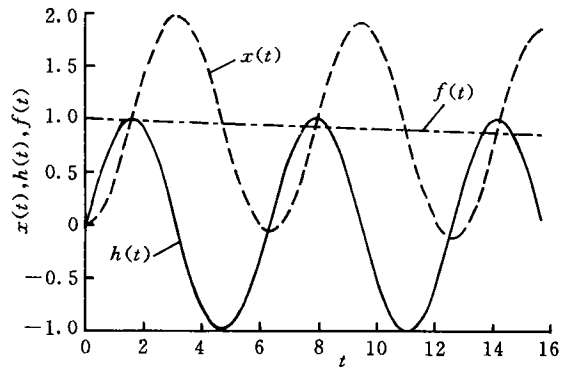


图 2 算例 1 的理论解

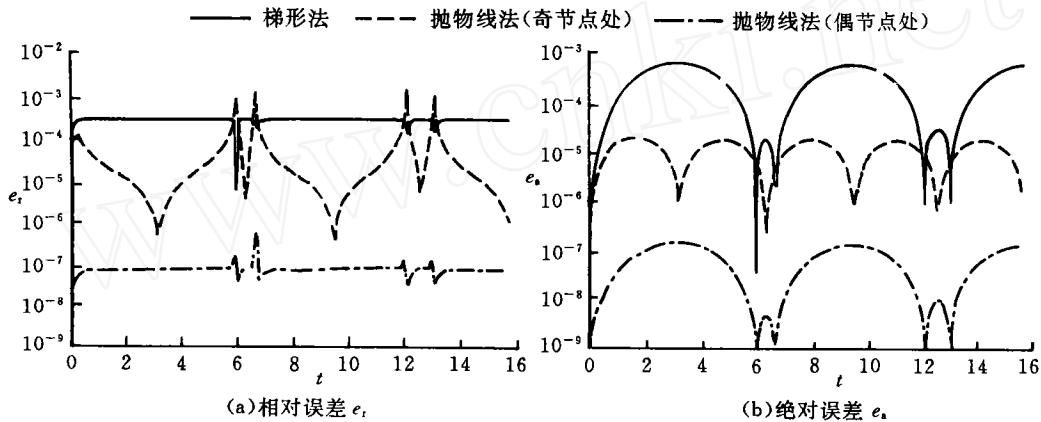


图 3 算例 1 的计算误差

由文[5]可知脉冲响应函数 $h(t)=\exp(-0.1t)\sin(0.99t)$ 。现取 $f(t)$ 为线性载荷,即 $f(t)=t$, 在零初条件时可得

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau = t + 0.2 - \exp(-0.1t) [-0.2 \times \cos(0.99)^{1/2}t + 0.98 \times (0.99)^{-1/2} \sin(0.99)^{1/2}t]$$

在 $[0, 5\pi]$ 内 $f(t), h(t)$ 等间隔取样 256 点,其理论解如图 4 所示,计算误差见图 5。图 5 中的误差规律与算例 1 相似,只是由于 $x(t)$ 不存在零点,相对误差和绝对误差的波动都比较平缓,分别维持在 10^{-3} 和 10^{-7} 水平上;起始时由于 $x(t)$ 比较小,尽管绝对误差很小,但相对误差很大,倒是无需太多关心的。对于抛物线法,在奇节点上仍存在许多尖峰,其道理与算例 1

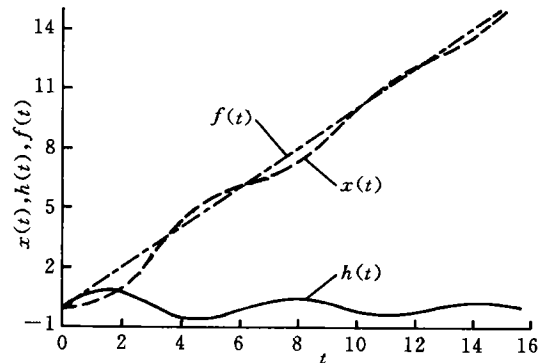


图 4 算例 2 的精确曲线

相同,在被积函数曲率为零的取样处精度很高,甚至超过了偶节点处的精度。

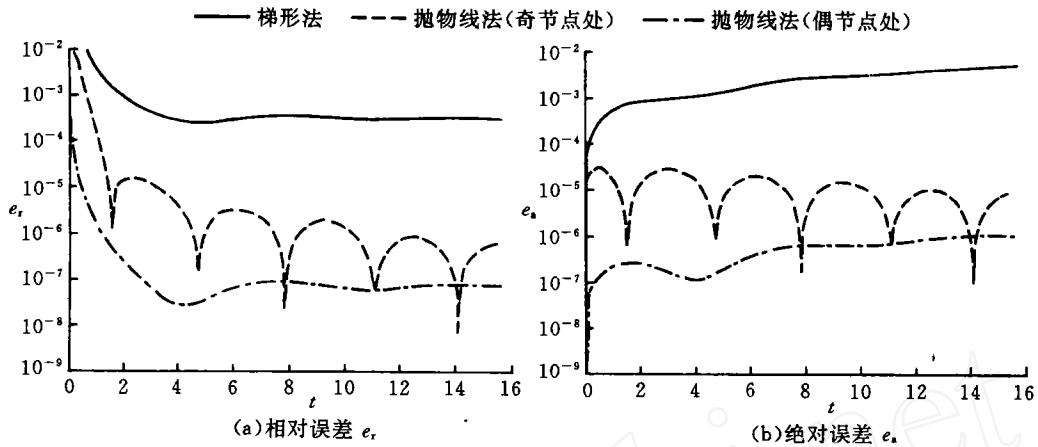


图5 算例2的计算误差

5 结 论

将快速卷积法用于结构动力响应中卷积的计算,给出了矩形法、梯形法、抛物线型法3种计算公式。对计算量的分析结果表明:当 $N \geq 64$ 时快速卷积法优于直接法,当 $N=1024$ 时,速度可提高1个数量级。

参 考 文 献

- 1 林家浩,沈为平,宋华茂,等. 结构非平稳随机响应的混合型精细时程积分. 振动工程学报,1995,8(2):127~135
- 2 Lin Jiahao, Wei Pingshen, Williams F W. A high precision direct integration scheme for non-stationary random seismic responses of non-classically damped structures. Struc Engi and Mech, 1995,3(3):215~228
- 3 宗孔德,胡广书. 数字信号处理. 北京:清华大学出版社,1988. 61~72
- 4 程佩青. 数字信号处理教程. 北京:清华大学出版社,1995. 246~251
- 5 郑兆昌. 机械振动(中册). 北京:机械工业出版社,1986. 456~459