

改善 FFT 精度的 2 种算法比较[†]

陈奎孚^② 焦群英 高小榕
(基础科学部) (清华大学)

摘 要 提出用梯形积分公式和抛物线型积分公式代替 FFT 中的矩形积分公式,以提高 FFT 精度。比较了矩形法、梯形法和抛物线法的截断误差,误差估计式表明,抛物线法的精度远远高于矩形法和梯形法,可达 ΔT^4 阶。用单频信号检验了这 3 种方法的精度。

关键词 FFT; 数值积分; 信号处理

中图分类号 TN911.6; O174.22

Comparison on 2 Algorithms for Improving FFT Precision

Chen Kuifu Jiao Qunying Gao Xiaorong
(Department of Basic Sciences) (Tsinghua University)

Abstract In order to improve the precision of FFT, the scheme of trapezoid and Simpson's rule are substituted for normal rectangular integration in FFT. The truncation errors show that the Simpson's rule is far more precise than the other 2 methods. The truncated error of a single frequency signal for 3 methods are also derived.

Key words numerical integration; FFT; signal processing

FFT 是数字信号处理的基本手段,长期以来人们一般都只是使用这一技术而不讨论其精度;但是数字仿真结果表明在一些常见的情形下,传统 FFT 的精度甚至只有 10^{-3} (当然这与以往的 8 位 A/D 技术是相适宜的)。由于 A/D 板目前已发展到 12 位、16 位,时域精度已达 10^{-5} ,FFT 的精度如果只有 10^{-3} 显然不能满足要求,因而应当发展高精度 FFT 算法。

传统的 FFT 算法采用的是矩形积分公式,本文中采用抛物线型、梯形积分公式代替矩形求积公式,以提高积分精度。文中给出了相应算法的误差估计公式和上述 3 种算法对单频信号 $x(t) = \exp(j\omega_0 t)$ 的检验结果比较。

1 传统 FFT 算法的精度

对信号 $x(t)$ 加矩形窗 $[-T/2, T/2]$ 截断后的 FT 定义为

收稿日期:1996-05-07

①国家自然科学基金资助项目

②陈奎孚,北京清华东路 17 号中国农业大学(东校区)74 信箱,100083

$$X(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (1)$$

若取 $f(t) = x(t) \exp(-j\omega t)/T$, 式(1)就是复值函数 $f(t)$ 在 $[-T/2, T/2]$ 上的积分。由于计算机只能通过对离散的 ω 进行数值积分来近似式(1), 即

$$X_R(\omega_l) \approx \frac{\Delta T}{T} \sum_{i=0}^{N-1} x(t_i) \exp(-j\omega_l t_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(t_i) \exp(-j\omega_l t_i) \quad (2)$$

式中: $\Delta T = T/N$, 为采样间隔; $t_i = i\Delta T - T/2$ 。使用FFT按式(2)计算时在 $[0, 2\pi/\Delta T]$ 内以 $\Delta\omega (= 2\pi/T)$ 等间隔采样, 即 $\omega_l = l\Delta\omega$ 。 X_R 的角标 R 表示矩形法。

现在估计式(2)的精度。

由附录可证明下述定理。

定理1 设 $f(x) = g(x) + jr(x)$ 是定义在实区间 $[a, b]$ 上的复值函数, $g(x)$ 和 $r(x)$ 分别为 $f(x)$ 的实部和虚部, 且 $g(x), r(x) \in C_{[a, b]}$, 则积分 $I = \int_a^b f(x) dx$ 的矩形近似公式

$$S_n = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i) + jh \sum_{i=0}^{n-1} r(x_i) \quad (3)$$

的误差估计式为

$$|R_n(f)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} (b-a)h \sup |f'(\eta)| \quad a \leq \eta \leq b$$

式中: $h = (b-a)/n$, 为区间 $[a, b]$ 的 n 等分区间长; $x_i = a + ih$ 。

证明 由附录定理2得

$$R_n(f) = \frac{b-a}{2} h g'(\eta_1) + j \frac{b-a}{2} h r'(\eta_2) \quad a \leq \eta_1, \eta_2 \leq b \quad (4)$$

显然 η_1 与 η_2 未必相等(而且有时也不存在 $\eta \in [a, b]$, 使 $f'(\eta) = g'(\eta_1) + r'(\eta_2)$)。对式(4)两边取绝对值, 有

$$|R_n(f)| = \frac{b-a}{2} h \sqrt{[g'(\eta_1)]^2 + [r'(\eta_2)]^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} (b-a)h \sup |f'(\eta)| \quad a \leq \eta \leq b$$

利用定理1, 取 $f(t) = x(t) \exp(-j\omega t)$, 则 $f'(t) = x'(t) \exp(-j\omega t) - j\omega x(t) \exp(-j\omega t)$, $[-T/2, T/2]$ 对应 $[a, b]$ 代入式(4)得

$$R_n(f) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} T \Delta T \sup \{ |x(\eta)| |\omega + jx'(\eta)/x(\eta)| \} \quad a \leq \eta \leq b$$

精度除与 ΔT (分割区间长) 有关外, 还与 ω 有关, 大体上与 ω 成线性关系, ω 偏离 $jx'(\eta)/x(\eta)$ 越远时谱的误差越大。

后文中的例子可表明式(2)对一些重要信号(如 $x(t) = \exp(j\omega_0 t)$) 的精度只有 10^{-3} 量级, 这是由于用式(2)求和时未计入 $x(t_N)$ 点, 破坏了矩形窗的对称性, 导致计算结果产生相移, 从而引起明显误差。这一误差随着 N 的增大而减小 (N 增大, 离散式(2)的窗越来越趋于对称)。

式(2)的另一有趣现象是幅值精度远高于实、虚部的精度(对任2个复数, 可以证明幅值的差异不大于实虚部的差异), 因而估计信号参数时采用幅值数据要准确些。

2 梯形法和抛物线法 FFT 的误差

采用梯形积分来近似式(1)。根据文献[1],可证明如下定理。

定理2 设 $f(x) = g(x) + jr(x)$ 为定义在实区间 $[a, b]$ 上的复值函数, $g(x)$ 和 $r(x)$ 分别为 $f(x)$ 的实部和虚部, 且 $g(x), r(x) \in C_{[a,b]}^2$, 则积分 $I = \int_a^b f(x) dx$ 的梯形近似公式

$$S_n = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) \right]$$

的误差估计式为

$$|R_n(f)| \leq \frac{\sqrt{2}}{12} (b-a) h^2 \sup |f''(\eta)| \quad a \leq \eta \leq b$$

证明过程与定理1相似,不再赘述。对傅里叶变换式(1),取 $f(t) = x(t) \exp(-j\omega t)$, 得梯形法 FFT 计算公式

$$X_T(\omega) = \frac{1}{N} \left\{ [x(t_0) \exp(-j\omega t_0) + x(t_N) \exp(-j\omega t_N)] / 2 + \sum_{i=1}^{N-1} x(t_i) \exp(-j\omega t_i) \right\} \quad (5)$$

而误差估计式为

$$|R_n(f)| \leq \frac{\sqrt{2}}{12} T \Delta T^2 \sup |\omega^2 x(\eta) - j\omega x'(\eta) - x''(\eta)| \quad a \leq \eta \leq b \quad (6)$$

可见梯形法的误差是 ΔT^2 阶的, 而 $|R_n(f)|$ 与 ω 为二次关系。

用式(5)计算有2个实际问题要解决: 1) 传统 FFT 只保留 $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{N-1})$ 这 N 个数据, 而式(6)还需要 $x(t_N)$; 2) 式(2)是采用 FFT 计算的, 式(5)如何利用 FFT。

作离线谱分析时, 一般存储很长一段时域的数据, 然后分段作谱分析, 这时已经得到 $x(t_N)$ 并存储在计算机中; 对实时或硬件 FFT, 数据缓冲区的长度一般为 N (N 为2的整数次幂), 最后一个数据 $x(t_N)$ 可读进寄存器中, 这样就解决了 $x(t_N)$ 的问题。

式(5)中 $\exp(-j\omega t_0) = \exp(-j\omega t_N)$, 利用变换

$$\left. \begin{aligned} y(t_i) &= x(t_i) \\ y(t_0) &= [x(t_0) + x(t_N)] / 2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(5)可写为

$$X_T(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(t_i) \exp(-j\omega t_i)$$

同式(2)形式一样, 就可采用 FFT 计算了。

对于抛物线型求积公式有如下定理。

定理3 设 $f(x) = g(x) + jr(x)$ 为定义在实区间 $[a, b]$ 上的复值函数, $g(x)$ 和 $r(x)$ 分别为 $f(x)$ 的实部和虚部, 且 $g(x), r(x) \in C_{[a,b]}^2$, 则积分 $I = \int_a^b f(x) dx$ 的抛物线型近似公式

$$S_n = \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{k=1}^m f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) \right] \quad (8)$$

的误差估计式为

$$|R(f)| \leq \frac{\sqrt{2}}{180} (b-a)h^4 \sup |f^{(4)}(\eta)| \quad a \leq \eta \leq b$$

式中 $x_k = a + hk/2$ 。

若将式(8)用于近似式(1),取 $f(t) = x(t)\exp(-j\omega t)$,得误差

$$|R(f)| \leq \frac{\sqrt{2}}{180} T \Delta T^4 \sup \left| \sum_{k=0}^4 C_4^k x^{(k)}(\eta) (j\omega)^{4-k} \right| \quad a \leq \eta \leq b$$

可见抛物线法 FFT 的精度为 ΔT^4 阶,这大大提高了积分精度。

这里同样存在 $x(t_N)$ 的问题,可按梯形法的方法解决。利用变换

$$\left. \begin{aligned} y(t_0) &= [x(t_0) + x(t_N)]/3 \\ y(t_{2i+1}) &= 4x(t_{2i+1})/3 \\ y(t_{2i}) &= 2x(t_{2i})/3 \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq i < N/2 \quad (9)$$

抛物线法的 FT 计算式为

$$\bar{X}_p(\omega_l) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y(t) \exp(-j\omega_l t)$$

便可以利用 FFT 了。式(9)相当于加一锯齿窗。

3 处理简谐信号的精度比较

傅里叶变换本质上是时将域信号分解成一系列简谐信号。下面考查用上述各种变换算法对本身就是简谐信号的 $s(t) = \exp(j\omega_0 t)$ 进行变换时的算法精度。对于离散的傅里叶变换可以证明也具有频移性质^[2],因而对信号 $s(t) = \exp(j\omega_0 t)$ 的傅里叶变换就是将 $x(t) = 1$ 的谱在 ω 轴右移 ω_0 。若将梯形法、抛物线法理解为加窗, $x(t) = 1$ 的谱实际上就是窗谱。为了方便,下面对 $x(t) = 1$ 的谱进行研究。

3.1 精确解

当 $x(t) = 1$ 时,式(1)的精确解为

$$X(\omega) = \sin(\omega T/2) / (\omega T/2) \quad (10)$$

它是对称矩形窗

$$w(t) = \begin{cases} 1/T & t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & t \notin [-T/2, T/2] \end{cases} \quad (11)$$

的谱。 $X(\omega)$ 是对称衰减函数,如图1(a)所示。

3.2 传统 FFT 算法

由式(2)得

$$X_R(\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{N \sin(\omega \Delta T/2)} \exp(j\omega \Delta T/2)$$

与式(10)相比,发生了 $\omega \Delta T/2$ 的相移,在 $\omega = 0$ 时相移为 0,且 $X_R(0) = X(0)$ 。 $|X(\omega) - X_R(\omega)|$ 如图1(b)所示,可见误差可高达 10^{-3} ,而幅值比较 $|X_R(\omega)| - |X(\omega)|$ 的图形如图1(c)所示,主瓣内幅值精度达 10^{-6} 。

3.3 梯形法

由式(7)和(8)可得

$$X_T(\omega) = \sin(\omega T/2) / [N \tan(\omega \Delta T/2)]$$

$X_T(\omega)$ 与 $X(\omega)$ 形状相似,图1(c)给出了 $X_T(\omega) - X(\omega)$ 的图形,可以看出主瓣内精度可达 10^{-6} 。

3.4 抛物线法

由式(10)和(11)可以推出

$$X_P(\omega) = \frac{2 \sin(\omega T/2)}{3N \sin(\omega \Delta T)} [2 + \cos(\omega \Delta T)] \quad (12)$$

尽管式(12)比式(10)复杂得多,但是形状还是相似的。由图1(d)的 $X_P(\omega) - X(\omega)$ 图形可看出,主瓣内精度远远高于前述2种算法,可达 10^{-10} 。

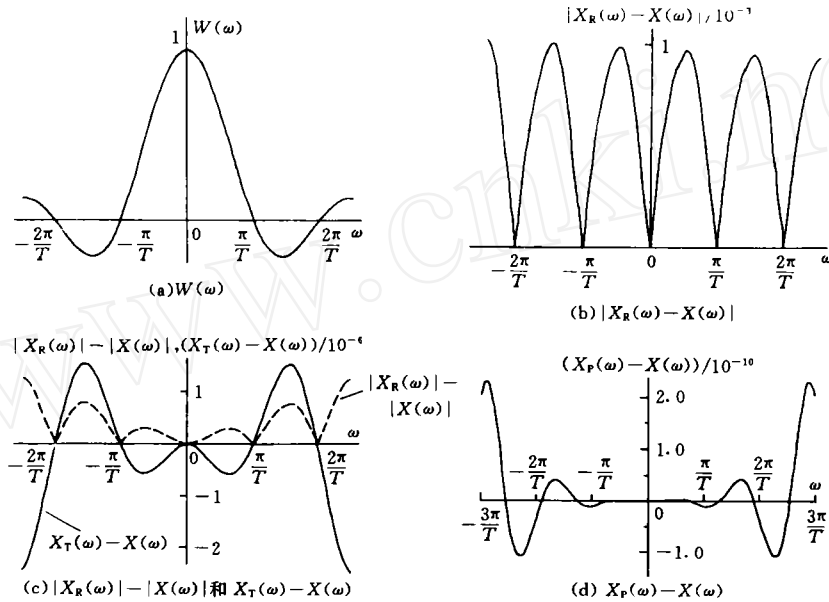


图1 3种方法的误差比较($N=1024$)

4 结 论

1) 推导了矩形法、梯形法和抛物线法 FFT 的误差公式。误差公式表明抛物线法优于前2种方法。

2) 推出了矩形法、梯形法和抛物线法 FFT 的窗谱,窗谱表明抛物线法精度远高于前两者。

参 考 文 献

- 1 徐萃薇. 计算方法引论. 北京: 高等教育出版社, 1985. 98~99
- 2 应怀樵. 波形和频谱分析与随机数据处理. 北京: 中国铁道出版社, 1985. 202~203

附录 复化矩形求积公式误差估计

本附录给出复化矩形求积公式误差估计式,这在一般数值分析教科书中均未提供.先从单区间开始.

定理1 若 $f(x) \in C^1_{[a,b]}$, 则矩形积分公式

$$S = f(a)(b-a) \approx \int_a^b f(x) dx$$

的误差为

$$R(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta) \quad a \leq \eta \leq b$$

证明 由泰勒展开公式得

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) \quad a \leq \xi \leq x \quad (A1)$$

对等式(A1)两边积分得

$$\int_a^b f(x) dx = f(a)(b-a) + \int_a^b f'(\xi)(x-a) dx \quad a \leq \xi \leq b \quad (A2)$$

由积分中值定理知,在 $[a,b]$ 上存在一点 η 使

$$\int_a^b f'(\xi)(x-a) dx = f'(\eta) \int_a^b (x-a) dx = f'(\eta)(b-a)^2/2 \quad a \leq \eta \leq b$$

代入式(A2)并整理得

$$R(f) = \int_a^b f(x) dx - f(a)(b-a) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta) \quad a \leq \eta \leq b$$

定理1即得证。

下面证复化矩形积分公式的误差估计式。

定理2 若 $f(x) \in C^1_{[a,b]}$, 则复化矩形求积公式

$$S_n = h \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)$$

的误差估计式为

$$R_n(f) = \frac{b-a}{2} h f'(\eta)$$

其中 $h = (b-a)/n$, 为 $[a,b]$ 区间 n 等分后的区间长, n 为等分间隔数。

证明 利用定理1有

$$R_n(f) = \int_a^b f(x) dx - S_n = \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\eta_i) \quad a+ih \leq \eta_i \leq a+(i+1)h$$

由于 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以一定存在一点 $\eta \in [a,b]$, 使

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\eta_i) = f'(\eta)$$

这样就有

$$R_n(f) = \frac{nh^2}{2} f'(\eta) = \frac{b-a}{2} h f'(\eta) \quad a < \eta < b$$

定理2得证。