



张焱辉, 李百丰, 邓婷, 韩盛柏, 蒋秀根. 基于几何非线性圆拱动力模型的拱形温室自振周期分析[J]. 中国农业大学学报, 2023, 28(05): 220-228.
ZHANG Yanhui, LI Baifeng, DENG Ting, HAN Shengbai, JIANG Xiugen. Analysis of natural vibration period of arch greenhouse based on a geometric nonlinear dynamic model of circular arch[J]. *Journal of China Agricultural University*, 2023, 28(05): 220-228.
DOI: 10.11841/j.issn.1007-4333.2023.05.20

基于几何非线性圆拱动力模型的拱形温室自振周期分析

张焱辉¹ 李百丰¹ 邓婷^{1,2} 韩盛柏^{1,3} 蒋秀根^{1*}

(1. 中国农业大学 水利与土木工程学院, 北京 100083;

2. 唐山市住房和城乡建设局, 河北 唐山 063000;

3. 中国建筑科学研究院有限公司 建研科技股份有限公司, 北京 100013)

摘要 针对拱形温室结构动力分析中的杆件弯曲振动问题, 采用直接刚度法, 对拱形温室自振特性进行研究。在分析拱的弯曲变形、剪切变形、轴向压缩变形、二阶效应以及基于分布质量的平动惯性和转动惯性的基础上, 建立了圆拱的位移控制方程, 求解得到了非线性平转动 Timoshenko 圆拱动力模型。由定解条件, 得到了特征方程, 通过求解特征方程, 给出了拱形温室自振周期的计算方法。利用本研究模型及其退化模型, 计算了拱棚和典型拱形温室结构在不同模型下的自振周期, 分析了不同模型的计算结果, 分析表明, 本研究建立的几何非线性可压缩平转动 Euler 梁模型可用于拱形温室结构自振周期计算。

关键词 温室; 圆拱; 动力分析; 几何非线性; 分布质量模型

中图分类号 TU261

文章编号 1007-4333(2023)05-0220-09

文献标志码 A

Analysis of natural vibration period of arch greenhouse based on a geometric nonlinear dynamic model of circular arch

ZHANG Yanhui¹, LI Baifeng¹, DENG Ting^{1,2}, HAN Shengbai^{1,2}, JIANG Xiugen^{1*}

(1. College of Water Resources & Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China;

2. Bureau of Housing & Urban-Rural Development, Tangshan 063000, China;

3. China Academy of Building Research Co., Ltd., CABR Technology Co., Ltd., Beijing 100013, China)

Abstract Aiming at the bending vibration problem of bar in dynamic analysis of arch greenhouse structure, the natural vibration characteristics of arch greenhouse were studied by direct stiffness method. Based on the analysis of bending deformation, shear deformation, axial compression deformation, second-order effect and translational inertia force and rotational inertia force based on distributed mass, the displacement control equation of circular arch is established, and the nonlinear translational Timoshenko circular arch dynamic model is obtained. The characteristic equation is obtained by the definite solution condition. By solving the characteristic equation, the calculation method of natural vibration period of arched greenhouse is given. By using the model established in this study and its degradation model, the natural vibration periods of arch shed and typical arched greenhouse structure under different models are calculated, and the calculation results of different models are analyzed. In conclusion, the geometric nonlinear compressible flat rotation Euler beam model established in this study can be used to calculate the natural vibration period of arched greenhouse structure.

Keywords greenhouse; circular arch; dynamic analysis; geometric nonlinearity; distributed mass model

拱形温室是设施农业中常用的温室型式,其内部空间大,受力具有优越性,非常适合规模化作业^[1]。拱形温室结构较轻,跨度较大,一般采用柔长细薄的杆件作为骨架,结构外覆盖柔性薄膜,使得这种结构对风荷载较为敏感,风荷载对结构产生的动力响应是温室结构设计中需要重点考虑的问题之一^[2-3]。并且,风振中风荷载的计算非常复杂,结构在风荷载作用下的内力和变形也非常复杂。因此研究拱形温室自振特性,提高结构抗风与抗撞击性能,保证温室结构设计的安全性,具有重要的科学意义。

拱作为一种压弯结构,由于轴线曲率的影响,截面存在压弯二重耦合^[4]:一是拱轴线曲率产生的耦合,轴线曲率导致拱的轴向变形和弯曲变形相互耦合,增大了二者在求解过程中的难度;二是大挠度产生的二阶弯矩,在拱结构中,截面的轴力与弯矩相互耦合,使得拱结构以受压为主,轴向压力对截面产生的二阶效应不可忽略。同时,拱形温室结构由于其截面整体抗弯刚度不足,容易引起较大的截面转动,以及温室拱结构的薄腹结构型式容易引起较大的剪切变形,使得在研究温室结构的弯曲自振特性时,需要引入考虑剪切变形的 Timoshenko 梁理论^[5]。另外,拱的振动问题还需要考虑惯性力的影响^[6],结构的振动会产生平动惯性力和转动惯性力,二者直接作用在结构上,使结构的受力分析变得更为复杂,尤其是转动惯量的影响会使拱结构的振动特性与仅考虑平动惯量的拱结构振动特性有较大区别。

目前,国内外在温室结构力学性能方面的研究较多。如考虑材料几何非线性以及弹塑性时温室结构的最不利位置^[7],温室结构在荷载作用下内力以

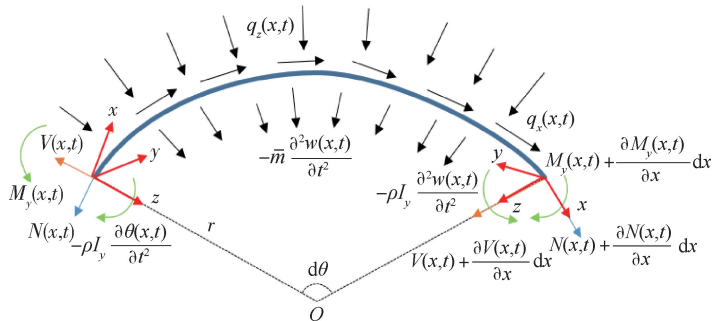
及变形的计算方法^[8-10]、温室结构产生的变形量计算问题^[11-12],对拱形温室的纵向抗风性能进行分析,建立以矩阵形式表达的刚度平衡方程^[13]。但关于温室结构动力响应问题的研究较少。李成志等^[14]用有限元法对异性温室结构进行了静力线性分析,雷隽卿等^[15]利用有限元软件 ANSYS,对脉动风下考虑流固耦合的温室结构进行了数值模拟计算和分析,但仅对温室结构的矩形框架部分进行了研究。邓婷婷^[16]对风振分析中的压杆弯曲振动的动态刚度矩阵模型理论进行研究,但仅考虑了平动惯性力,转动惯性力并未考虑,其研究对象也仅为温室杆件中的压杆。姜迎春等^[17]等对考虑脉动风速的平面刚架日光温室结构动力响应规律进行了研究,对温室骨架结构动力响应进行时程分析,确定了骨架结构危险截面的位置,但并未考虑轴力对弯曲振动的影响。

本研究拟针对拱形温室的弯曲振动问题,考虑拱的弯曲变形、剪切变形、轴向压缩变形、二阶效应以及基于分布质量的平动惯性力和转动惯性力,采用直接刚度法,推导拱的动力模型,计算拱形温室不同模型的自振周期,分析其动力响应规律,以为温室结构的动力分析和设计提供参考依据。

1 基本模型

1.1 基本假定

对温室结构中的圆拱杆件,按照右手螺旋法则定义坐标系(图 1):以圆拱左端为坐标原点;以杆件轴线为 x 轴,向右为正; y 轴垂直于曲轴平面,法向上为正; z 轴在曲轴平面内,垂直于杆件轴线,指向圆心 O 为正。



$d\theta$ 为微段圆心角; r 为圆拱半径; $-m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$ 为平动惯性力; $-\rho I_y \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2}$ 为转动惯性力矩。

$d\theta$ are Micro-segment center angle. r are round arch radius. $-m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$ are horizontal inertial force. $-\rho I_y \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2}$ are

rotational inertia moment.

图 1 圆拱杆件坐标系及受力分析

Fig. 1 Coordinate system and stress analysis of circular arch

杆件所受外荷载包括轴向均布荷载 $q_x(x,t)$ 、径向均布荷载 $q_z(x,t)$ 、均布力矩 $m_y(x,t)$ ，所有外荷载与坐标轴方向一致为正；内力包括轴力 $N(x,t)$ 、剪力 $V(x,t)$ 和弯矩 $M_y(x,t)$ ，当截面外法线方向与坐标轴正向一致时，内力与坐标方向一致为正，当截面外法线方向与坐标轴正向相反时，内力与坐标方向相反为正；位移包括轴向位移 $u(x,t)$ 、径向挠度 $w(x,t)$ 和截面转角 $\theta(x,t)$ ，位移与坐标轴方向一致为正。

本研究模型推导过程基于以下假定：等曲率拱，即圆拱，圆心角 $\alpha = l/r$ ，其中 r 为圆拱半径， l 为弧长；压弯耦合，考虑拱的拉压和弯曲变形相互影响；Timoshenko 弯曲模型，采用平截面假定，考虑圆拱的剪切变形，截面法向与轴线不重合；大挠度模型，考虑压杆的二阶效应，即轴力在挠度上对截面产生的二阶弯矩；可压缩模型，考虑圆拱截面轴向刚度和轴向变形；等截面，截面质量与刚度保持常数；线弹性，材料应力与应变服从比例关系；准常轴力，在考虑二阶弯矩时，轴力视为常数，并且 N_0 取压为正；弯曲振动，只考虑径向挠度运动产生的惯性力。

1.2 基本方程

1.2.1 平衡方程

对微段隔离体进行平衡分析，建立平衡方程，平衡方程包括轴力平衡方程、剪力平衡方程以及弯矩平衡方程，分别如下：

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} - \frac{V(x,t)}{r} + q_x(x,t) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \frac{N(x,t)}{r} - \bar{m} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + q_z(x,t) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial M_y(x,t)}{\partial x} - V(x,t) + N_0 \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \rho I_y \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + m_y(x,t) = 0 \quad (3)$$

式中： \bar{m} 为单位长度的质量，kg；假定质量均匀分布， \bar{m} 为常数； ρ 为微段的密度，kg/m³； I_y 为杆件截面对 y 轴的惯性矩，m⁴。

1.2.2 几何方程

几何方程为：

$$\epsilon_x(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{w(x,t)}{r} \quad (4)$$

$$\theta(x,t) + \gamma(x,t) = -\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \frac{u(x,t)}{r} \quad (5)$$

$$\kappa_y(x,t) = -\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{r \partial x} - \frac{\partial \gamma(x,t)}{\partial x} \quad (6)$$

式中： $\epsilon_x(x,t)$ 为轴向应变； $\gamma(x,t)$ 为剪切转角； $\kappa_y(x,t)$ 为法向弯曲曲率。

1.2.3 物理方程

物理方程为：

$$\left. \begin{aligned} N(x,t) &= EA \epsilon_x(x,t) \\ M_y(x,t) &= EI_y \kappa_y(x,t) \\ V(x,t) &= -\frac{GA}{\mu} \gamma(x,t) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中： E 为弹性模量； A 为截面面积； G 为剪切模量； μ 为截面剪应力不均匀系数。

1.3 位移控制方程及求解

将基本方程(1),(2),..., (7)中的荷载、位移以及内力采用分离变量法进行分解，公式为：

$$F(x,t) = \bar{F}(x) \sin \omega t \quad (8)$$

式中： ω 为杆件弯曲振动圆频率。

1.3.1 位移控制方程

综合方程(1),(2),..., (8)得到径向挠度控制方程为：

$$a \frac{d^6 \bar{w}(x)}{dx^6} + b \frac{d^4 \bar{w}(x)}{dx^4} + c \frac{d^2 \bar{w}(x)}{dx^2} + d \bar{w}(x) = \frac{1}{EI_y} \left[\begin{aligned} &\xi_1 \frac{d\bar{q}_x(x)}{dx} + \xi_2 \frac{d^3 \bar{q}_x(x)}{dx^3} + \xi_3 \bar{q}_z(x) + \\ &\xi_4 \frac{d^2 \bar{q}_z(x)}{dx^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d\bar{m}_y(x)}{dx} + \frac{d^3 \bar{m}_y(x)}{dx^3} \end{aligned} \right] \quad (9)$$

式中： $a = 1, b = (\omega^2 \eta_m \eta_G + \omega^2 \eta_\rho + 2 - \lambda_N)/r^2, c = (\omega^4 \eta_\rho \eta_m \eta_G + 2\omega^2 \eta_\rho - \omega^2 \eta_m - \lambda_N + 1 - \omega^2 \eta_A \eta_m)/r^4, d = \omega^2 \eta_\rho (1 - \omega^2 \eta_A \eta_m)/r^6, \xi_1 = (\omega^2 \eta_\rho \eta_G + \omega^2 \eta_\rho \eta_A - 1)/r, \xi_2 = r(\eta_G + \eta_A), \xi_3 = \omega^2 \eta_\rho \eta_A/r^2, \xi_4 = \eta_A + 1 - \omega^2 \eta_\rho \eta_G, \eta_\rho = r^2 \rho I_y/EI_y, \eta_A = EI_y/r^2 EA, \eta_m = r^4 \bar{m}/EI_y, \eta_G = \mu EI_y/r^2 GA, \lambda_N = r^2 N_0/EI_y。$

轴向位移控制方程为：

$$r \frac{d^3 \bar{u}(x)}{dx^3} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}(x)}{dx} - \frac{d^2 \bar{w}(x)}{dx^2} + \left(\frac{\bar{m}\omega^2}{EA} - \frac{1}{r^2} \right) \bar{w}(x) + \frac{r}{EA} \frac{d\bar{q}_x(x)}{dx} + \frac{1}{EA} \bar{q}_z(x) = 0 \quad (10)$$

剪切转角控制方程为：

$$EA \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \frac{EA}{r} \frac{d\bar{w}(x)}{dx} + \frac{GA}{r\mu} \bar{\gamma}(x) + \bar{q}_x(x) = 0 \quad (11)$$

截面转角控制方程为：

$$\bar{\theta}(x) = -\frac{d\bar{w}(x)}{dx} - \frac{1}{r}\bar{u}(x) - \bar{\gamma}(x) \quad (12)$$

1.3.2 挠度方程求解

根据方程(9)的齐次格式可得圆拱径向挠度通解一般格式为：

$$\bar{w}_H = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 x} + c_4 e^{r_4 x} + c_5 e^{r_5 x} + c_6 e^{r_6 x} \quad (13)$$

式中： c_1, c_2, \dots, c_6 为位移常系数； r_1, r_2, \dots, r_6 为特征根，特征根存在实根、虚根、零根及重根等情况，不同特征根对应不同的解。根据特征根的类型，解得径向挠度通解共有 40 种。本研究使用 2 种通解。

通解 1：

当 $\Delta < 0, \bar{D} < 0, \bar{E} > 0, \bar{F} > 0$ 时， $r_{1,2} = \pm i \sqrt{-\bar{D}}, r_{3,4} = \pm \sqrt{\bar{E}}, r_{5,6} = \pm \sqrt{\bar{F}}$

$$\bar{w}_H = c_1 \sin\beta_1 x + c_2 \cos\beta_1 x + c_3 \sinh\alpha_2 x + c_4 \cosh\alpha_2 x + c_5 \sinh\alpha_3 x + c_6 \cosh\alpha_3 x \quad (14)$$

式中： $\beta_1 = \sqrt{-\bar{D}}, \alpha_2 = \sqrt{\bar{E}}, \alpha_3 = \sqrt{\bar{F}}, \bar{D} = (-b - 2\sqrt{A}\cos\frac{\varphi}{3})/3a, \bar{E} = [-b + \sqrt{A}(\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3})]/3a, \bar{F} = [-b + \sqrt{A}(\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3})]/3a, \Delta = B^2 + 4AC, A = b^2 - 3ac, B = bc - 9ad, C = c^2 - 3bd$ 。

通解 2：

当 $\Delta < 0, \bar{D} < 0, \bar{E} > 0, \bar{F} > 0$ 时， $r_{1,2} = \pm i \sqrt{-\bar{D}}, r_{3,4} = \pm \sqrt{\bar{E}}, r_{5,6} = 0$

$$\bar{w}_H = c_1 \sin\beta_1 x + c_2 \cos\beta_1 x + c_3 \sinh\alpha_2 x + c_4 \cosh\alpha_2 x + c_5 + c_6 x \quad (15)$$

式中： $\beta_1 = \sqrt{-\bar{D}}, \alpha_2 = \sqrt{\bar{E}}$ 。

将通解(14)和(15)写为向量格式：

$$\bar{w}_H(x) = \mathbf{f}_w \mathbf{c} \quad (16)$$

式中： \mathbf{c} 为位移系数向量， $\mathbf{c} = \{c_1 \ c_2 \ \dots \ c_6\}^T$ ； \mathbf{f}_w 为基函数向量，每个 \mathbf{f}_w 对应 1 个导数转换矩阵 \mathbf{Z}_w 以及积分转换矩阵 $\bar{\mathbf{Z}}_w$ ，例如，通解 1 对应的 $\mathbf{f}_w, \mathbf{Z}_w, \bar{\mathbf{Z}}_w$ 分别为：

$$\mathbf{f}_w = \{\sin\beta_1 x \ \cos\beta_1 x \ \sinh\alpha_2 x \ \cosh\alpha_2 x \ \sinh\alpha_3 x \ \cosh\alpha_3 x\}$$

$$\mathbf{Z}_w = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{Z}}_w = \begin{bmatrix} 0 & 1/\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\alpha_3 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 位移与内力

以径向挠度基函数为基础，结合基本方程以及位移控制方程，得到其他物理量的表达式和基函数见表 1。

2 自振分析方法

2.1 拱棚

拱棚结构形式简单，仅由 1 个圆拱构成，两端支座为铰支，根据边界条件，可得定解条件如下：左支座：径向挠度为 0，即 $w(0) = 0$ ，轴向位移为 0，即 $u(0) = 0$ ，曲率为 0，即 $\kappa_y(0) = 0$ ；右支座：径向挠度为 0，即 $w(\alpha) = 0$ ，轴向位移为 0，即 $u(\alpha) = 0$ ，曲率为 0，即 $\kappa_y(\alpha) = 0$ 。根据定解条件，构建定解方程：

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_w(0) \\ \mathbf{f}_u(0) \\ \mathbf{f}_\kappa(0) \\ \mathbf{f}_w(l) \\ \mathbf{f}_u(l) \\ \mathbf{f}_\kappa(l) \end{Bmatrix} \mathbf{c} = 0 \quad (17)$$

系数矩阵 \mathbf{A} 中只有 1 个未知量 ω ，已知方程(17)一定存在有意义的非零解，则系数矩阵 \mathbf{A} 需要满足特征方程：

$$|\mathbf{A}| = 0 \quad (18)$$

通过求解方程(18)，可以得到自振圆频率 ω ，进而由 $T = 2\pi/\omega$ 得到结构的自振周期 T 。再将求得的 ω 带回系数矩阵 \mathbf{A} ，通过求解方程组(17)，得到位移系数 \mathbf{c} ，再根据式(16)，即可得到各阶振型。

2.2 典型拱形温室

采用本研究模型计算结构的自振周期时，首先需明确杆件边界条件。本研究中，将典型拱形温室结构抽象为 3 个杆件，两端支座铰接，拱与柱子刚接，其结构示意图 2。由边界条件和连续条件得该温室结构定解条件见表 2。

底部柱子为一般动力梁，其位移与内力根据文

献[18]得到。由表2的定解条件可以得到系数矩阵 \mathbf{A} ，由特征方程 $|\mathbf{A}| = 0$ 可以求得结构自振周期，再

由 $\mathbf{Ac} = 0$ ，可以求得位移系数 \mathbf{c} ，最后根据式(16)，即可得到各阶振型。

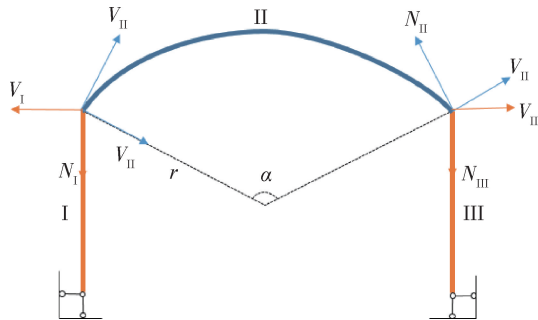
表1 其他物理量表达式及基函数

Table 1 Other physical expressions and basis functions

物理量 Physical quantity	表达式 Expression	基函数 Primary function
轴向位移 Axial displacement	$\bar{u}(x) = f_u \mathbf{c}$	$f_u = -\Omega_1 f_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w + \Omega_2 f_w \bar{\mathbf{Z}}_w - \Omega_3 f_w \bar{\mathbf{Z}}_w$
截面转角 Angle of cross rotation	$\bar{\theta}(x) = f_\theta \mathbf{c}$	$f_\theta = f_w \mathbf{Z}_w \left[-\frac{r\eta_G \Omega_1}{\eta_\Lambda} \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w + \left(\frac{r\eta_G \Omega_2}{\eta_\Lambda} + \frac{\Omega_1}{r} \right) \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w - \left(1 + \frac{\Omega_2}{r} + \frac{r\eta_G \Omega_3}{\eta_\Lambda} + \frac{\eta_G}{\eta_\Lambda} \right) \mathbf{I} \right] + \frac{\Omega_3}{r} f_w \bar{\mathbf{Z}}_w$
弯曲曲率 Bending curvature	$\bar{\kappa}_y(x) = f_\kappa \mathbf{c}$	$f_\kappa = f_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w \left[-r \frac{\eta_G}{\eta_\Lambda} \Omega_1 \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w + \left(r \frac{\eta_G}{\eta_\Lambda} \Omega_2 + \frac{1}{r} \Omega_1 \right) \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w - \left(1 + \frac{1}{r} \Omega_2 + r \frac{\eta_G}{\eta_\Lambda} \Omega_3 + \frac{\eta_G}{\eta_\Lambda} \right) \mathbf{I} \right] + \frac{\Omega_3}{r} f_w$
轴力 Axial force	$\bar{N}(x) = f_N \mathbf{c}$	$f_N = EA f_w \left[-\Omega_1 \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w + \Omega_2 \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w - \mathbf{I} \left(\Omega_3 + \frac{1}{r} \right) \right]$
弯矩 Bending moment	$\bar{M}_y(x) = f_M \mathbf{c}$	$f_M = EI_y f_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w \left[-r \frac{\eta_G \Omega_1}{\eta_\Lambda} \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w + \left(r \frac{\eta_G}{\eta_\Lambda} \Omega_2 + \frac{\Omega_1}{r} \right) \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w - \left(1 + \frac{\Omega_2}{r} + r \frac{\eta_G}{\eta_\Lambda} \Omega_3 + \frac{\eta_G}{\eta_\Lambda} \right) \mathbf{I} \right] + \frac{\Omega_3}{r} f_w$
剪力 Shearing force	$\bar{V}(x) = f_V \mathbf{c}$	$f_V = -\frac{GA}{\mu} \frac{\eta_G}{\eta_\Lambda} f_w \mathbf{Z}_w \left[r \Omega_1 \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w - r \Omega_2 \mathbf{Z}_w \mathbf{Z}_w + (r \Omega_3 + 1) \mathbf{I} \right]$

注：以上各表达式中， $\Omega_1 = r^3 \eta_\Lambda / (\omega^2 \eta_b \eta_G + \omega^2 \eta_b \eta_\Lambda - 1 - \eta_\Lambda - \eta_G)$ ， $\Omega_2 = [r\eta_\Lambda(\lambda_N - 1 - \omega^2 \eta_b - \omega^2 \eta_G \eta_m)] / (\omega^2 \eta_b \eta_G + \omega^2 \eta_b \eta_\Lambda - 1 - \eta_\Lambda - \eta_G)$ ， $\Omega_3 = [(\omega^2 \eta_\Lambda \eta_m - 1)(\omega^2 \eta_b \eta_G - 1 - \eta_\Lambda - \eta_G)] / [r(\omega^2 \eta_b \eta_G + \omega^2 \eta_b \eta_\Lambda - 1 - \eta_\Lambda - \eta_G)]$ 。

Note: In the above expressions, $\Omega_1 = r^3 \eta_\Lambda / (\omega^2 \eta_b \eta_G + \omega^2 \eta_b \eta_\Lambda - 1 - \eta_\Lambda - \eta_G)$ ， $\Omega_2 = [r\eta_\Lambda(\lambda_N - 1 - \omega^2 \eta_b - \omega^2 \eta_G \eta_m)] / (\omega^2 \eta_b \eta_G + \omega^2 \eta_b \eta_\Lambda - 1 - \eta_\Lambda - \eta_G)$ ， $\Omega_3 = [(\omega^2 \eta_\Lambda \eta_m - 1)(\omega^2 \eta_b \eta_G - 1 - \eta_\Lambda - \eta_G)] / [r(\omega^2 \eta_b \eta_G + \omega^2 \eta_b \eta_\Lambda - 1 - \eta_\Lambda - \eta_G)]$ 。



I、II、III 为杆件编号。V_I、V_{II}、V_{III} 分别为杆件 I、II、III 的剪力；N_I、N_{II}、N_{III} 分别为杆件 I、II、III 的轴力。r 为圆拱半径；α 为圆心角。

I, II and III are bar numbers. V_I, V_{II} and V_{III} are shear force of bars I, II and III; N_I, N_{II} and N_{III} are axial forces of bars I, II and III. r is round arch radius; α is central angle.

图2 典型拱形温室结构示意图

Fig. 2 Typical arched greenhouse structure diagram

表 2 典型拱形温室结构定解条件
Table 2 Solution conditions of typical arched greenhouse structure

分类 Classification	描述 Description	定解条件 Additional condition
左支座 Left support	杆件 I 挠度为 0	$w_1(0) = 0$
	杆件 I 曲率为 0	$\kappa_1(0) = 0$
左节点 Left node	杆件 I 弯矩 = 杆件 II 弯矩	$M_I(L) = M_{II}(0)$
	杆件 I 转角 = 杆件 II 转角	$\theta_I(L) = \theta_{II}(0)$
	节点水平力平衡	$V_{II}(0)\sin\frac{\alpha}{2} + N_{II}(0)\cos\frac{\alpha}{2} - V_I(L) = 0$
	节点水平位移相等	$w_2(0)\sin\frac{\alpha}{2} + u_2(0)\cos\frac{\alpha}{2} = w_1(L)$
	节点竖向位移相等	$w_{II}(0)\cos\frac{\alpha}{2} - u_{II}(0)\sin\frac{\alpha}{2} = 0$
右节点 Right node	杆件 III 弯矩 = 杆件 II 弯矩	$M_{III}(L) = M_{II}(\alpha)$
	杆件 III 转角 = 杆件 II 转角	$\theta_{III}(L) = \theta_{II}(\alpha)$
	节点水平力平衡	$V_{III}(L) + V_{II}(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} - N_{II}(\alpha)\cos\frac{\alpha}{2} = 0$
	节点水平位移相等	$w_{II}(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} - u_{II}(\alpha)\cos\frac{\alpha}{2} = w_{III}(L)$
	节点竖向位移相等	$w_{II}(\alpha)\cos\frac{\alpha}{2} - u_{II}(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} = 0$
右支座 Right support	杆件 III 挠度为 0	$w_{III}(0) = 0$
	杆件 III 曲率为 0	$\kappa_{III}(0) = 0$

3 拱形温室结构自振周期计算

在计算拱形温室自振周期时，共考虑了以下 8 种不同的模型：

- 模型 1, 几何线性不可压缩平动 Euler 梁模型；
- 模型 2, 几何线性不可压缩平转动 Euler 梁模型；
- 模型 3, 几何线性不可压缩平转动 Timoshenko 梁模型；
- 模型 4, 为几何线性可压缩平转动 Euler 梁模型；
- 模型 5, 几何线性可压缩平转动 Timoshenko 梁模型；
- 模型 6, 几何非线性可压缩平动 Euler 梁模型 ($N_0 = 0.3N_{cr}$)；
- 模型 7, 几何非线性可压缩平转动 Euler 梁模型 ($N_0 = 0.3N_{cr}$)；
- 模型 8, 几何非线性可压缩平转动 Euler 梁模型 ($N_0 = 0.5N_{cr}$)。

3.1 拱棚

选取跨度为 8 m, 失高为 3 m 的拱棚, 用本研究模型计算其自振周期。杆件为焊接薄壁圆钢管, 截面规格为 $\Phi 51 \times 2$ mm, 所用材料弹性模量 $E = 2.06 \times 10^5$ MPa, 剪切模量 $G = 8.0 \times 10^4$ MPa, 剪应力不均匀系数 $\mu = 1.2$, 质量密度 $\rho = 7\ 800$ kg/m³, 铰接拱脚。每种模型计算了前 7 阶振型的自振周期, 各模型周期计算结果见表 3。

3.2 典型拱形温室

选取拱跨度为 10 m, 失高 2.5 m 的典型拱形温室, 计算 2 种不同结构型式下的自振周期: 结构 1, 柱拱截面相同, 均采用焊接薄壁圆钢管, 截面规格为 $\Phi 51 \times 2$ mm; 结构 2, 柱拱截面不同, 柱子采用方钢管, 截面规格为 50 mm \times 50 mm \times 2 mm, 拱采用圆钢管, 截面规格为 $\Phi 40 \times 2$ mm。2 种结构所用材料力学性质相同, 弹性模量 $E = 2.06 \times 10^5$ MPa, 剪切模量 $G = 8.0 \times 10^4$ MPa, 剪应力不均匀系数 $\mu = 1.2$, 质量密度 $\rho = 7\ 800$ kg/m³。每种模型计算了前 7 阶振型的自振周期, 各模型周期计算结果见表 4。

表3 拱棚不同模型自振周期计算结果

Table 3 Calculation results of natural vibration period of different arch shed models

振型 Mode	模型 1	模型 2	模型 3	模型 4	模型 5	模型 6	模型 7	模型 8
	Model	Model	Model	Model	Model	Model	Model	Model
	group 1	group 2	group 3	group 4	group 5	group 6	group 7	group 8
振型 1 Mode 1	0.525 6	0.782 8	0.783 0	0.783 2	0.783 7	0.387 9	0.620 3	0.555 2
振型 2 Mode 2	0.329 8	0.329 9	0.330 0	0.329 9	0.330 1	0.296 5	0.296 6	0.279 2
振型 3 Mode 3	0.135 1	0.170 0	0.170 1	0.170 0	0.170 1	0.126 0	0.160 0	0.154 3
振型 4 Mode 4	0.109 0	0.109 0	0.109 1	0.109 1	0.109 2	0.104 9	0.104 9	0.102 4
振型 5 Mode 5	0.063 0	0.073 8	0.073 9	0.073 8	0.073 9	0.061 1	0.071 8	0.070 6
振型 6 Mode 6	0.054 4	0.054 4	0.054 5	0.054 5	0.054 6	0.053 4	0.053 4	0.052 7
振型 7 Mode 7	0.036 5	0.041 2	0.041 3	0.041 2	0.041 3	0.035 9	0.040 6	0.040 1

表4 典型拱形温室不同模型自振周期计算结果

Table 4 Calculation results of natural vibration period of different models of typical arch greenhouse

结构型式 Structure type	振型 Mode	模型 1	模型 2	模型 3	模型 4	模型 5	模型 6	模型 7	模型 8
		Model	Model	Model	Model	Model	Model	Model	Model
		group 1	group 2	group 3	group 4	group 5	group 6	group 7	group 8
结构 1 Structure 1	振型 1	0.428 9	0.410 9	0.410 7	0.562 1	0.354 4	0.754 0	0.496 8	0.447 3
	振型 2	0.191 1	0.196 3	0.196 1	0.194 8	0.188 6	0.341 1	0.187 9	0.183 8
	振型 3	0.129 3	0.126 2	0.125 7	0.128 6	0.064 5	0.189 2	0.126 3	0.124 8
	振型 4	0.099 5	0.104 4	0.104 3	0.114 0	0.054 8	0.068 0	0.076 3	0.075 6
	振型 5	0.070 9	0.070 2	0.069 5	0.077 3	0.041 5	0.049 5	0.059 4	0.058 6
	振型 6	0.050 4	0.050 1	0.049 9	0.060 5	0.034 8	0.037 5	0.038 0	0.037 9
	振型 7	0.037 7	0.037 7	0.037 3	0.038 3	0.027 6	0.032 0	0.031 4	0.031 3
结构 2 Structure 2	振型 1	0.612 6	0.598 9	0.598 7	0.662 0	0.507 7	1.022 4	0.615 8	0.590 3
	振型 2	0.307 0	0.301 9	0.301 7	0.352 4	0.287 3	0.140 1	0.334 5	0.323 8
	振型 3	0.171 4	0.180 0	0.179 9	0.189 0	0.183 7	0.118 7	0.185 4	0.183 1
	振型 4	0.068 9	0.125 4	0.125 4	0.083 8	0.109 3	0.088 7	0.082 7	0.081 9
	振型 5	0.052 8	0.093 1	0.092 5	0.054 4	0.052 7	0.070 8	0.054 0	0.053 7
	振型 6	0.042 6	0.069 8	0.069 5	0.043 3	0.042 9	0.053 7	0.043 0	0.042 8
	振型 7	0.033 9	0.053 6	0.053 2	0.034 0	0.035 9	0.042 8	0.033 7	0.033 6

3.3 结果对比与分析

拱棚同一振型下每种模型与模型 1 的相对误差的计算结果见表 5。可以看出：采用不同分析模型，得到的自振周期不同，基本规律是，平转动模型与平动模型的误差 > 40%；几何线性模型与几何非线性模型的误差 > 20%；Timoshenko 梁模型与 Euler 梁模型的误差 < 0.1%；可压缩模型与不可压缩模型的

误差 < 0.1%。产生这些差异的原因是，考虑的变形越多，结构刚度越小，自振周期越长。相比而言，转动惯量和二阶效应影响更为显著，工程计算中，为了得到计算简单、精度足够的拱形温室结构自振周期，应考虑平转动引起的结构变形和轴力产生的二阶效应，可忽略剪切变形和轴向压缩变形，故应考虑采用几何非线性可压缩平转动 Euler 梁模型。

表 5 拱棚各模型周期相对误差计算结果
Table 5 Relative error calculation results of arch shed model period

振型 Mode	模型 1 Model group 1	模型 2 Model group 2	模型 3 Model group 3	模型 4 Model group 4	模型 5 Model group 5	模型 6 Model group 6	模型 7 Model group 7	模型 8 Model group 8	%
振型 1 Mode 1	0.00	48.94	48.96	49.00	49.11	-26.19	18.01	5.63	
振型 2 Mode 2	0.00	0.01	0.04	0.03	0.06	-10.10	-10.09	-15.35	
振型 3 Mode 3	0.00	25.81	25.89	25.81	25.89	-6.76	18.42	14.16	
振型 4 Mode 4	0.00	0.03	0.13	0.08	0.18	-3.78	-3.75	-6.08	
振型 5 Mode 5	0.00	17.17	17.34	17.18	17.34	-3.01	14.03	12.07	
振型 6 Mode 6	0.00	0.06	0.26	0.15	0.35	-1.89	-1.83	-3.09	
振型 7 Mode 7	0.00	12.88	13.17	12.88	13.17	-1.71	11.16	10.06	

4 结束语

本研究在分析拱的弯曲变形、剪切变形、轴向压缩变形、二阶效应以及基于分布质量的平动惯性力和转动惯性力的基础上，建立了非线性平转动 Timoshenko 圆拱动力模型。根据不同的定解条件，提出了拱形温室结构的自振分析方法，实现了不同拱形温室结构的自振分析。采用本研究模型计算了拱棚和典型拱形温室结构在不同模型下的自振周期，对不同模型的计算结果进行分析表明，对于拱形温室结构，应考虑平转动和几何非线性引起的变形，可忽略剪切变形和轴向变形，故可采用几何非线性可压缩平转动 Euler 梁模型来计算其自振周期。

参考文献 References

[1] 周长吉, 王应宽. 中国现代温室的主要型式及其性能[J]. 农业工程学报, 2001, 17(1): 16-21
Zhou C J, Wang Y K. Modern greenhouses and their performances in China [J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2001, 17(1): 16-21 (in Chinese)

[2] 蒋秀根, 尉锦三, 张丽莉. 考虑桁架刚度的温室结构风载效应分析方法[J]. 中国农业大学学报, 2005, 10(6): 70-74
Jiang X G, Ju J S, Zhang L L. Analytical method for wind load effect on greenhouse structure considering of truss deformations [J]. *Journal of China Agricultural University*, 2005, 10(6): 70-74 (in Chinese)

[3] 杨升华, 刘雪迎, 蒋秀根. 基于临时加固策略的日光温室极端风雪灾害对策[J]. 江苏大学学报: 自然科学版, 2022, 43(1): 45-53
Yang S H, Liu X Y, Jiang X G. Countermeasures against extreme wind and snow disasters to solar greenhouses based on temporary reinforcement [J]. *Journal of Jiangsu University: Natural Science Edition*, 2022, 43(1): 45-53 (in Chinese)

[4] 石家华. 解析型圆拱单元构造及其应用[D]. 北京: 中国农业大学, 2020

- Shi J H. Structure of analytical circular arch element and its application [D]. Beijing: China Agricultural University, 2020 (in Chinese)
- [5] 邓婷. 基于大位移模型的圆拱几何非线性分析及其应用[D]. 北京: 中国农业大学, 2018
- Deng T. Geometric nonlinear analysis and its application of circular arch based on large displacement model [D]. Beijing: China Agricultural University, 2018 (in Chinese)
- [6] Trie T, Yamada G, Tanaka K. Natural frequencies of in-plane vibration of arcs[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1983, 50: 449-452
- [7] Briassoulis D, Dougka G, Dimakogianni D, Vayas I. Analysis of the collapse of a greenhouse with vaulted roof[J]. *Biosystems Engineering*, 2016, 151: 495-509
- [8] 梁宗敏, 蒋秀根, 尉锦三. 横风向风载下连栋温室结构分析简化方法研究[C]// 国际农业论坛: 2005北京都市农业工程科技创新与发展国际研讨会论文集. 北京: 中国农业工程学会, 2005: 346-350
- Liang Z M, Jiang X G, Ju J S. Study on the simplify method of multi span green-house structure design under transverse wind load[C]. In: *International Symposium on Agriculture-2005 Proceedings of the International Symposium on Innovation and Development of Urban Agricultural Engineering in Beijing*. Beijing: China Water Power Press, 2005: 337-341 (in Chinese)
- [9] 程勤阳. 温室结构设计的基本方法(二): 温室结构计算及结构支撑体系[J]. *农业工程技术: 温室园艺*, 2006, 26(10): 16-18
- Cheng Q Y. The basic method of greenhouse structure design (2): Greenhouse structure calculation and structure support system [J]. *Agricultural Engineering Technology: Greenhouse & Horticulture*, 2006, 26(10): 16-18 (in Chinese)
- [10] 李密密. 基于稳定承载力的温室结构空间整体性能研究[D]. 北京: 中国农业大学, 2012
- Li M M. Study on space robustness of greenhouse structures based on stable bearing capacity[D]. Beijing: China Agricultural University, 2012 (in Chinese)
- [11] Emekli N Y, Kendirli B, Kurunc A. Structural analysis and functional characteristics of greenhouses in the Mediterranean region of Turkey[J]. *African Journal of Biotechnology*, 2010, 9(21): 3131-3139
- [12] Morcou G. Performance of conservatories under wind and snow loads [J]. *Journal of Architectural Engineering*, 2009, 15(3): 102-109
- [13] 郭韦佟, 朱丹, 宓林, 蒋秀根. 拱形屋面温室纵向抗风分析中的曲梁刚度矩阵模型[J]. *中国农业大学学报*, 2017, 22(10): 113-119
- Guo W T, Zhu D, Mi L, Jiang X G. Curved beam stiffness matrix model for the longitudinal wind resistance analysis of arch roof greenhouse[J]. *Journal of China Agricultural University*, 2017, 22(10): 113-119 (in Chinese)
- [14] 李成志, 梁宗敏, 尉锦三. 异形温室结构的有限元分析[J]. *中国农业大学学报*, 2007, 12(2): 84-87
- Li C Z, Liang Z M, Ju J S. Spatial finite element analysis of heterogeneous greenhouse[J]. *Journal of China Agricultural University*, 2007, 12(2): 84-87 (in Chinese)
- [15] 雷勇卿, 王东霞, 蒋秀根, 李保明. 温室结构风振效应的数值模拟[J]. *中国农业大学学报*, 2007, 12(4): 85-89
- Lei J Q, Wang D X, Jiang X G, Li B M. Numerical analysis on wind vibration effect on greenhouse structures [J]. *Journal of China Agricultural University*, 2007, 12(4): 85-89 (in Chinese)
- [16] 邓婷, 姜旭瞳, 丁敏, 汤丽锋. 温室风振分析中的压杆弯曲振动动态刚度矩阵模型[J]. *中国农业大学学报*, 2018, 23(1): 120-125
- Deng T, Jiang X T, Ding M, Tang L F. Dynamic stiffness matrix model for the flexural vibration of compression bar in greenhouse wind vibration analysis[J]. *Journal of China Agricultural University*, 2018, 23(1): 120-125 (in Chinese)
- [17] 姜迎春, 白义奎, 王永刚, 王毅. 考虑脉动风速的平面刚架日光温室结构动力响应规律[J]. *中国农业大学学报*, 2019, 24(4): 136-147
- Jiang Y C, Bai Y K, Wang Y G, Wang Y. Dynamic response analyses of plane frame solar greenhouse considering fluctuating wind speed [J]. *Journal of China Agricultural University*, 2019, 24(4): 136-147 (in Chinese)
- [18] 韩盛柏. 解析型非线性平转动 Timoshenko 动力杆件单元构造[D]. 北京: 中国农业大学, 2021
- Han S B. Development of nonlinear Timoshenko-Bar dynamic element based on analytical shape function [D]. Beijing: China Agricultural University, 2020 (in Chinese)

责任编辑: 刘迎春



第一作者简介: 张焱辉, 硕士研究生, 就读于中国农业大学水利与土木工程学院, 专业为土木工程。曾获得中国农业大学硕士学业一等奖学金、国家励志奖学金、三好学生、优秀团员等荣誉奖项。研究生期间主要参与的科研创新项目为“解析型非线性动力圆拱单元构造”, 通过查阅文献汇集研究方向, 建立圆拱几何非线性动力分析模型, 再利用能量法和变分原理进行深入研究, 构造解析型几何非线性圆拱单元。



通讯作者简介: 蒋秀根, 硕士, 教授, 长期从事土木工程领域和农业建筑结构方向的科学研究及人才培养工作。重点进行了结构分析及性能模型的理论研究和数值计算方案, 提出了解析型杆件有限单元的构造理论, 解决了有限单元法分析精度和计算效率不一致的矛盾; 提出的考虑界面变形的组合梁性能理论模型和热-流动-结构的耦合分析数值计算方案, 改进了结构性能分析的理论、提高了工程性能分析精度。形成了“系统思维建立、专业精神养成、知识体系建构”的人才培养理念和育人实践经验。承担多项国家级及省部级研究项目, 发表高水平论文 50 余篇, 获省部级教学成果奖 4 项, 为北京市优秀青年教师和教学名师。