

基于粮堆有效摩擦系数分布规律的平底筒仓储料 静态压力场计算方法

陈家豪^{1,2} 陈桂香^{1,2} 王忠旭¹ 李润阳¹ 李东桥¹

(1. 河南工业大学 土木建筑学院, 郑州 450001;

2. 河南省粮油仓储建筑与安全重点实验室, 郑州 450001)

摘要 为准确描述筒仓储料内部任意一点的压力,同时考虑到筒仓中储料与仓壁以及储料与储料之间不一定处于临界滑动状态,其接触面上实际摩擦应力与法向压力之比 \leq 最大静摩擦系数,定义了“有效摩擦系数”,即2个物体接触面上的实际摩擦应力与法向压力之比,并对粮堆有效摩擦系数分布的进行有限元数值模拟,提出筒仓仓壁和粮堆内部有效摩擦系数分布规律的数学表达式;基于粮堆有效摩擦系数分布规律,采用储料纵向剖分和微元体静力平衡分析的方法,提出筒仓储料静态压力场计算方法;将本研究结果与数值模拟和Janssen公式计算结果进行对比分析。结果表明:1)本研究计算方法能够计算得到储料内部任意一点的竖向压力和水平压力以及筒仓侧压力,同时能够得到同一水平面上竖向压力分布的非均匀性;2)采用本研究计算方法计算得到的粮堆内部不同深度处的压力与数值模拟结果相比较,两者存在一定差异;3)采用本研究计算方法计算得到的筒仓侧压力与数值模拟和Janssen公式计算结果相比较,三者相差不大。研究可为粮食行业内涉及储料散体压力场的诸多问题提供理论支持。

关键词 粮堆; 筒仓; 有效摩擦系数; 压力场; 摩擦应力; 非均匀分布

中图分类号 TU249;O347.7

文章编号 1007-4333(2019)11-0152-10

文献标志码 A

Calculation method for static pressure field of bulk material in silo based on distribution law of effective friction coefficient in grain pile

CHEN Jiahao^{1,2}, CHEN Guixiang^{1,2}, WANG Zhongxu¹, Li Runyang¹, LI Dongqiao¹

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China;

2. Henan Key Laboratory of Grain Storage Facility and Safety, Zhengzhou 450001, China)

Abstract The aim of this study is to accurately describe the pressure at any point inside the bulk material in silo. By considering that the interface between bulk material in silo and silo wall and the interface between bulk materials are all not necessary in the critical state of relative sliding and thus the ratio of the actual friction force to the normal force on the contact interface is less than or equal to the maximum static friction coefficient, “effective coefficient of friction”, which represents the ratio of actual frictional stress and normal stress on the contact surface of two objects, is defined. Firstly a finite element numerical simulation for the distribution of the effective coefficient of friction in grain pile is carried out, and the mathematical expression for the distribution law of effective friction coefficient on silo wall and effective friction coefficient in interior of grain pile are presented; Then based on the distribution law of effective friction coefficient of grain pile and the bulk material in the silo is divided and static equilibrium analysis of grain pile infinitesimal is used, the calculation method of static pressure field of bulk material in silo is presented; The calculated results of this study

收稿日期: 2019-01-21

基金项目: 河南工业大学高层次人才科研启动基金项目(31401176); 粮食公益性行业科研专项(201513001); 国家自然科学基金项目(51608176)

第一作者: 陈家豪, 讲师, 博士, 主要从事散体物料压力、仓储建筑结构研究, E-mail: 1142653303@qq.com

are compared and analyzed with the numerical simulation values and Janssen formula. The results show that: 1) The vertical and horizontal pressures at any point in the bulk material and the lateral pressures of the silo can be calculated, and the non-uniformity of the vertical pressure distribution on horizontal plane of grain pile can be obtained by the method of this study; 2) Compared with the numerical simulation results, the pressures at different depths in interior of grain pile calculated by the method of this study are different; 3) Compared with the results of numerical simulation and Janssen formula, the lateral pressure of silo calculated by the method of this study has little difference.

Keywords grain pile; silo; effective friction coefficient; pressure field; frictional stress; non-uniform distribution

筒仓的结拱、温度-湿度-压力多场耦合问题等目前粮食行业遇到的诸多难题,其本质是筒仓储料散体压力场问题。掌握筒仓储料静态压力场分布规律及其理论计算方法是解决上述诸多问题的基础和关键。这里的“储料静态压力场”主要是指正常储存状态下散体储料边界(散体储料与仓壁相交处)以及散体储料内部任意一点的竖向压力和水平压力。

经典散体压力的计算主要有 3 种方法:第一种方法是对散体的滑动楔体进行受力分析,进而得到不同深度处的水平侧压力,例如库仑理论;第二种方法是选取散体内部任意一个微元,利用莫尔圆分析其应力状态进而得到水平侧压力,例如朗肯土压力理论;第三种方法是选取粮堆内部散体薄片作为微元,建立微元静力平衡方程,进而求得散体压力,例如 Janssen 理论。随着有限元与离散元的发展,众多国内外专家学者对储料在储存状态(静态)和装卸料状态(动态)下的筒仓侧压力^[1-5]、仓壁摩擦力^[6-8]以及粮堆底部压力^[9]等进行了数值仿真,同时也开展了大量的试验研究^[10-12],取得了丰富的研究成果。在理论研究方面,国内外专家学者针对筒仓侧压力问题进行了研究。原方等^[13-15]考虑了浅圆仓的曲线仓壁与直线挡墙的不同,并根据粮堆破裂角的大小将筒仓粮堆分为 3 种不同工况进行水平侧压力计算。陈长冰^[16]利用总体平衡法和虚位移法对筒仓粮堆压力进行了推导。张磊^[17]采用楔体单元模型,利用极限平衡方法推导出不同工况下筒仓水平侧压力公式。已有研究主要针对粮堆边界上的散体压力进行研究^[18-19],而对筒仓储料压力场的研究相对较少。除 Janssen 理论其他理论均无法得到储料内部的竖向压力和水平压力,但现有理论仍无法准确描述筒仓储料内部任意一点的压力。

GB 50077—2003《钢筋混凝土筒仓设计规范》采用修正的 Janssen 公式计算高径比 $H/D \geq 1.5$ 的筒仓的静态储料压力,并在此基础上考虑卸料时的动态压力对 Janssen 公式进行修正。虽然通过 Janssen 公式可以得到筒仓储料内部的散体压力,但

是该公式的提出,最初是为了解决筒仓侧压力问题而非储料内部压力问题。再者,Janssen 公式是基于“散体内部任意横截面上的竖向压力均匀分布”和“储料与仓壁处于临界滑动状态”等假设得到的。而事实上仓壁摩擦的影响竖向压力在水平面上不可能是均匀分布的^[9,20-21]。当两个相对静止的物体处于临界滑动状态时,此时接触面上的摩擦应力达到最大值,最大静摩擦应力与接触面上的法向压力之比为“最大静摩擦系数”,平常用到的“静摩擦系数”一般指的就是最大静摩擦系数。对于筒仓中的散装粮堆,储料与仓壁以及储料与储料之间不一定处于临界滑动状态,接触面上的实际摩擦应力与法向压力之比不一定达到最大静摩擦系数^[9]。因此,将储料与仓壁以及储料与储料的接触看作处于临界滑动状态,同时以最大静摩擦系数作为实际摩擦应力与法向压力之比从而对粮食散体压力进行分析计算,这样做是不可取的。为此本研究定义接触面上实际摩擦应力(切应力)与法向应力(正应力)之比为“有效摩擦系数”,以此来描述储料与仓壁以及储料与储料之间的实际接触状态。

本课题组前期对仓储结构中储料静态压力场进行的数值模拟和模型试验研究,认为储料与仓壁之间的摩擦力以及储料与储料之间的竖向摩擦力是仓底竖向压力非均匀性的根本原因。由于有效摩擦系数是摩擦力产生的基本要素,所以有效摩擦系数的分布规律可能是储料静态压力场的本质规律。本研究针对目前储料内部任意一点压力的研究相对较少,现有理论无法准确描述筒仓内粮食散体静态压力场的现状,拟摒弃 Janssen 关于竖向压力均匀分布以及储料与仓壁处于临界滑动状态的假设,采用将筒仓储料进行划分以及微元体静力平衡分析的方法,并基于粮堆有效摩擦系数分布规律,推导散体储料任意一点的竖向压力和水平压力,以期提出筒仓储料静态压力场的计算方法,为粮食行业内涉及储料散体压力场的诸多问题提供理论支持。

1 粮堆有效摩擦系数分布的数值模拟

本研究采用有限元数值模拟的方法对粮堆有效摩擦系数进行研究,筒仓-储料有限元模型的建立采用三维建模的方式。由于储料刚度与仓壁、仓底刚度相差较大,因此采用刚-柔接触,即储料视为可变形的柔体,仓体结构视为不变形刚体。储料采用理想弹塑性本构关系和 DP(Drucker-Prager)屈服准则以及非关联流动法则进行模拟。仓壁与储料之间的接触应力(包括法向压力和摩擦应力)采用增广拉格朗日乘子法进行计算。最终建立的筒仓储料压力场有限元计算模型及储料网格划分见图 1。

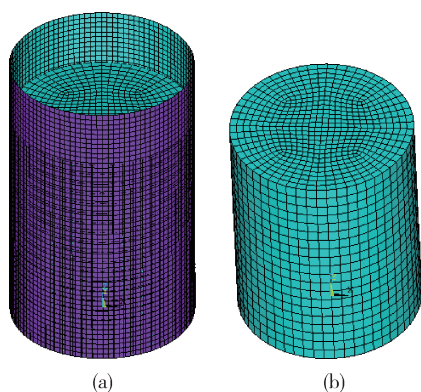
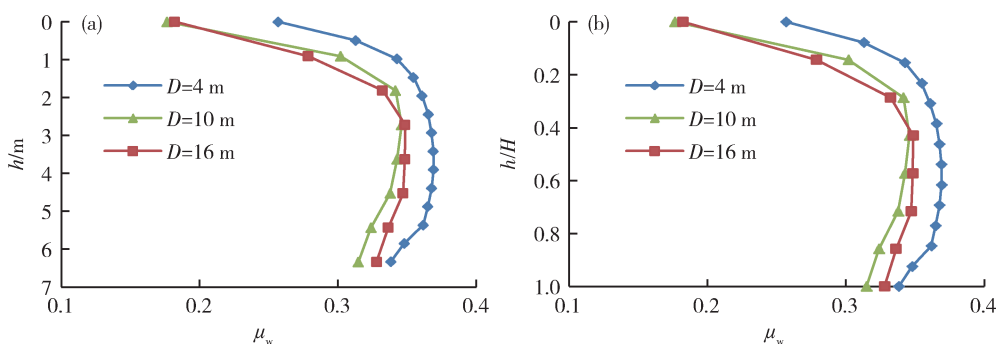


图 1 筒仓储料压力场有限元计算模型(a)和储料网格划分(b)

Fig. 1 Finite element calculation model of pressure field of bulk material in silo (a) and mesh generation of bulk material (b)



h 为粮堆深度; h/H 为粮堆深度比; μ_w 为仓壁有效摩擦系数; D 为筒仓直径。下图同。

h is grain pile depth; h/H is depth ratio of grain pile; μ_w is the effective friction coefficient of wall; D is silo diameter. The same in the Figs below.

图 2 不同筒仓直径仓壁有效摩擦系数 μ_w 与粮堆深度 h (a)和粮堆深度比 h/H (b)的关系

Fig. 2 The relation between the effective friction coefficient of wall μ_w and grain pile depth h (a) and depth ratio h/H (b) under different diameters of silo

提取粮堆不同深度位置各节点在其环向接触面上的摩擦应力和径向水平压力(即环向接触面上的法向压力),根据本研究对“有效摩擦系数”的定义,将各节点摩擦应力除以径向水平压力即可得到有效摩擦系数。本研究分别考虑仓壁有效摩擦系数沿粮堆深度的分布规律和粮堆内部有效摩擦系数沿粮堆径向、粮堆深度的分布规律,再组合为粮堆任意一点的有效摩擦系数。

1.1 仓壁有效摩擦系数的分布规律

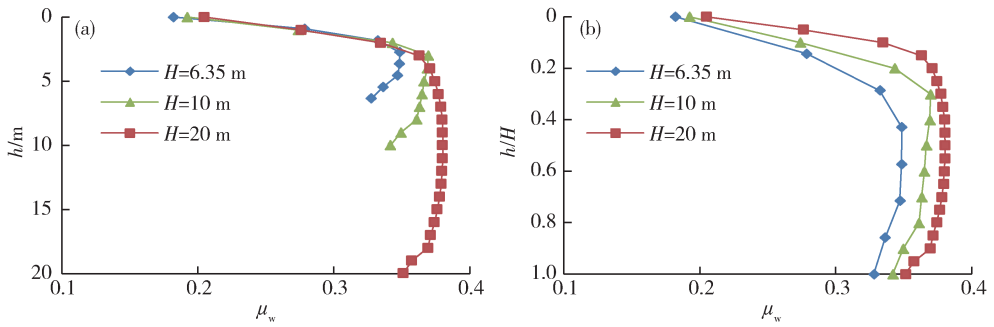
将有限元模拟结果按照单一影响因素的不同,分为不同筒仓直径 D 、不同装粮高度 H 和不同外摩擦系数 $\mu_{w,max}$ 的结果,分析仓壁有效摩擦系数与以上 3 个因素以及粮堆深度 h 、深度比 h/H 的关系。

1)筒仓不同直径 D 情况下仓壁有效摩擦系数与粮堆深度、深度比的关系。

筒仓不同直径(内径)情况下的仓壁有效摩擦系数与粮堆深度、深度比的关系见图 2。筒仓几何属性和储料材料属性为:筒仓直径 D 分别为 4、10 和 16 m,装粮高度 H 均为 6.35 m,粮堆密度 ρ 均为 804 kg/m^3 ,储料内摩擦角均为 25° (内摩擦系数 $\mu_{g,max}$ 为 0.47),外摩擦系数 $\mu_{w,max}$ 均为 0.40。其中,直径为 4 m 的筒仓,高径比为 1.6,属于深仓;直径为 10、16 m 的筒仓,高径比 H/D 分别为 0.6 和 0.4,属于浅仓。

2)筒仓不同装粮高度 H 情况下仓壁有效摩擦系数与粮堆深度、深度比的关系。

筒仓不同装粮高度情况下仓壁有效摩擦系数与粮堆深度、深度比的关系见图 3。筒仓几何属性和



H 为筒仓装粮高度, 下图同。

H is grain pile height. The same in the Figs below.

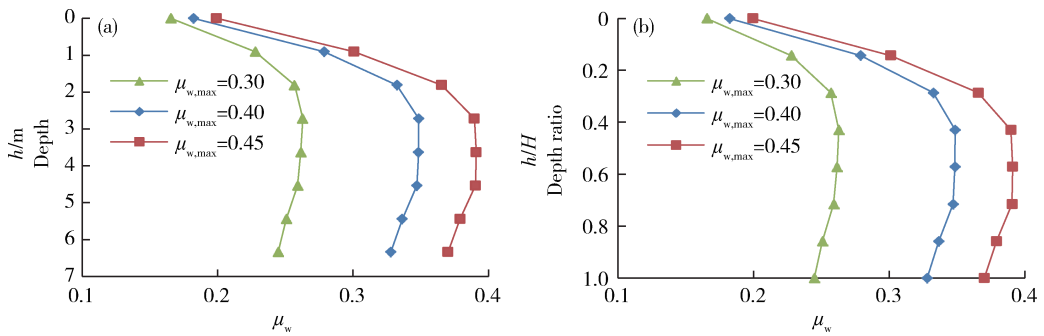
图 3 不同装粮高度仓壁有效摩擦系数 μ_w 与粮堆深度 h (a) 和粮堆深度比 h/H (b) 的关系

Fig. 3 The relation between the effective friction coefficient of wall μ_w and grain pile depth h (a) and depth ratio h/H (b) under different pile height

储料材料属性为:筒仓装粮高度 H 分别为 6.35、10 和 20 m,直径 D 均为 16 m,粮堆密度 ρ 均为 804 kg/m^3 ,储料内摩擦角均为 25° (内摩擦系数 $\mu_{g,\max}$ 为 0.47),外摩擦系数 $\mu_{w,\max}$ 均为 0.40。其中,装粮高度为 6.35、10 和 20 m 的筒仓,高径比 H/D 分别为 0.4、0.6 和 1.3,均属于浅仓。

3)筒仓不同外摩擦系数 $\mu_{w,\max}$ 情况下仓壁有效摩擦系数与粮堆深度、深度比的关系。

筒仓不同外摩擦系数(指储料与仓壁间最大静摩擦系数)情况下的仓壁有效摩擦系数与粮堆深度、深度比的关系如图 4 所示。筒仓几何属性和储料材料属性为:外摩擦系数 $\mu_{w,\max}$ 分别为 0.30、0.40 和 0.45,装粮高度 H 均为 6.35 m,直径 D 均为 16 m,粮堆密度 ρ 均为 804 kg/m^3 ,储料内摩擦角均为 25° (内摩擦系数 $\mu_{g,\max}$ 为 0.47)。筒仓高径比 H/D 为 0.4,属于浅仓。



$\mu_{w,\max}$ 为仓壁外摩擦系数,图 5 同。

$\mu_{w,\max}$ is coefficient of external friction of silo wall. The same in Fig. 5.

图 4 不同外摩擦系数仓壁有效摩擦系数 μ_w 与粮堆深度 h (a) 和粮堆深度比 h/H (b) 的关系

Fig. 4 The relation between the effective friction coefficient of wall μ_w and grain pile depth h (a) and depth ratio h/H (b) under different coefficient of external friction

从图 2~4 可以看出,筒仓直径、装粮高度、外摩擦系数和深度比等因素均对仓壁有效摩擦系数有影响。粮堆同一深度位置,仓壁有效摩擦系数随着筒仓直径的增大而减小,随着装粮高度的增加而增大,随着外摩擦系数的增大而增大;粮堆相同深度比位置,仓壁有效摩擦系数随着筒仓直径的增大而减小,随着装粮高度的增加而增大,随着外摩擦系数的增大而增大;仓壁有效摩擦系数随着粮堆深度比的增

加先增大,当达到峰值后开始减小,分布形式近似为二次函数;仓壁的有效摩擦系数均小于外摩擦系数(储料与仓壁间的最大静摩擦系数)。

根据以上规律,假定仓壁有效摩擦系数 μ_w 的分布服从如下函数。

$$\mu_w = \frac{H\mu_{w,\max}}{R} \left[a \left(\frac{h}{H} \right)^2 + b \left(\frac{h}{H} \right) + c \right] \quad (1)$$

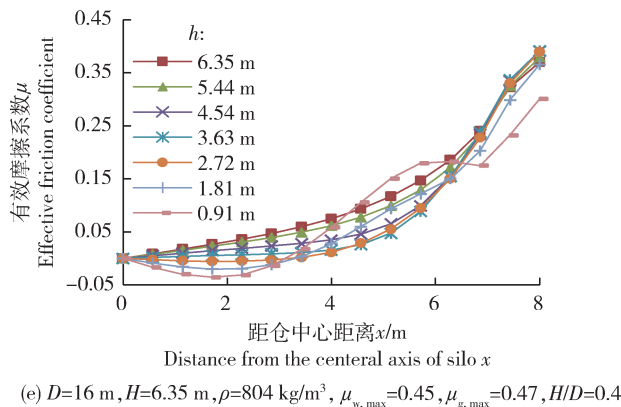
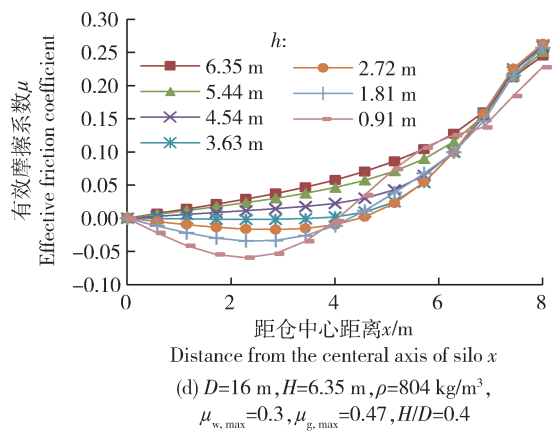
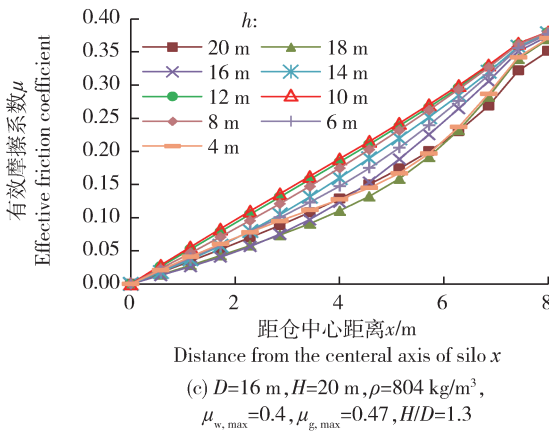
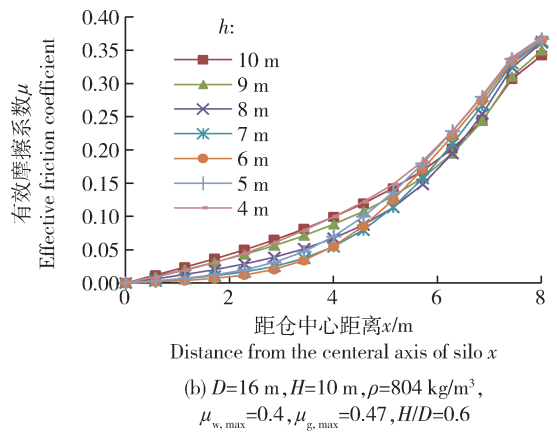
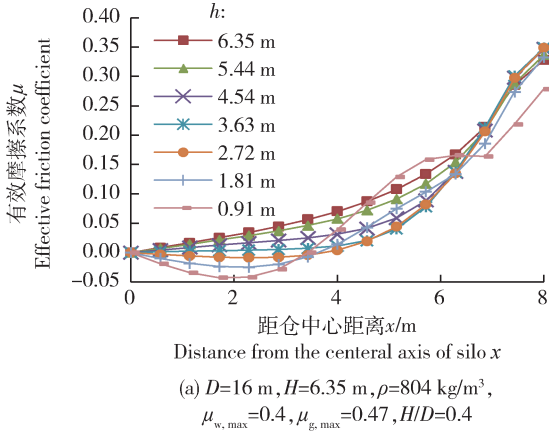
式中: R 为筒仓半径; a 、 b 、 c 为待拟合常数,利用有

限元算例的结果,运用 Origin 软件并基于最小二乘法,可得 $a=-0.83, b=1.05, c=0.49$ 。

1.2 粮堆内部有效摩擦系数的分布规律

对粮堆内部有效摩擦系数进行有限元数值模拟与分析,考察筒仓直径、装粮高度和外摩擦系数等不

同仓体与储料参数对粮堆内部有效摩擦系数 μ 分布的影响。不同仓体与储料参数情况下粮堆内部有效摩擦系数 μ 在粮堆内部的分布见图 5。可以看出,粮堆内部任意一点的有效摩擦系数与筒仓直径、装粮高度、仓壁外摩擦系数、粮堆深度以及该点距仓中



ρ 为粮堆密度; $\mu_{w, \max}$ 为仓壁外摩擦系数; $\mu_{g, \max}$ 为储料内摩擦系数。下图同。

ρ is grain pile density; $\mu_{w, \max}$ is coefficient of external friction of silo wall; $\mu_{g, \max}$ is coefficient of internal friction of bulk material; H/D is ratio of height to diameter. The same in the following figure.

图 5 不同仓体与储料参数粮堆内部不同深度处有效摩擦系数 μ 沿径向的分布

Fig. 5 Radial distribution of effective friction coefficient μ at different depths in interior of grain pile under different parameters of silos and storage materials

心水平距离等因素有关,但主要是与装粮高度、仓壁外摩擦系数和测点距仓中心水平距离均等因素有关。粮堆同一深度位置,有效摩擦系数随着筒仓直径的增大而减小,随着装粮高度的增加而增大,随着外摩擦系数的增大而增大;筒仓相同深度处的有效摩擦系数随着测点距仓中心水平距离的增加而增大,有效摩擦系数的分布形式近似为指数函数。

根据以上规律,假定粮堆内部有效摩擦系数 μ 的分布服从如下函数:

$$\mu = \mu_w \left(\frac{e^{B(x/R)(R/H)} - 1}{e^{BR/H} - 1} \right) \quad (2)$$

式(2)经化简,得:

$$\mu = \mu_w \left(\frac{e^{Bx/H} - 1}{e^{BR/H} - 1} \right) \quad (3)$$

式中: μ_w 为仓壁有效摩擦系数; x 为测点与筒仓中心的水平距离; B 为待拟合常数。利用有限元算例的结果,运用 Origin 软件并基于最小二乘法,拟合式(3)中常数 B ,得 $B=3.48$ 。

1.3 粮堆任意一点有效摩擦系数

将式(1)代入式(3)可得粮堆任意一点有效摩擦系数 μ 为:

$$\mu = \frac{H\mu_{w,max}}{R} \left[a \left(\frac{h}{H} \right)^2 + b \left(\frac{h}{H} \right) + c \right] \left(\frac{e^{Bx/H} - 1}{e^{BR/H} - 1} \right) \quad (4)$$

式中: $a=-0.83, b=1.05, c=0.49, B=3.48$ 。

2 筒仓储料静态压力场计算方法

2.1 基本思想

首先,将储料在水平面上以环线进行划分,分为一个中心圆盘和若干同心圆环,并将储料沿环线进行纵向切割,划分为一个位于粮堆中心的实心圆柱和若干个在其周围的空心圆柱(图 6)。然后,分别对实心圆柱和空心圆柱取单位高度的微元,并建立微元的平衡方程,进行受力分析。最后,通过求解平衡方程得到实心圆柱和各空心圆柱中的压力(包括竖向压力、水平压力等),同时考虑仓壁和粮堆内部有效摩擦系数的分布规律,从而得到粮堆的压力场。当储料在水平面上通过划分得到的圆盘直径和圆环宽度足够小时,可认为竖向压力在粮堆任一横截面上的每一个圆盘和圆环内是均匀分布的,并可通过计算得到较为精确的粮堆压力场。

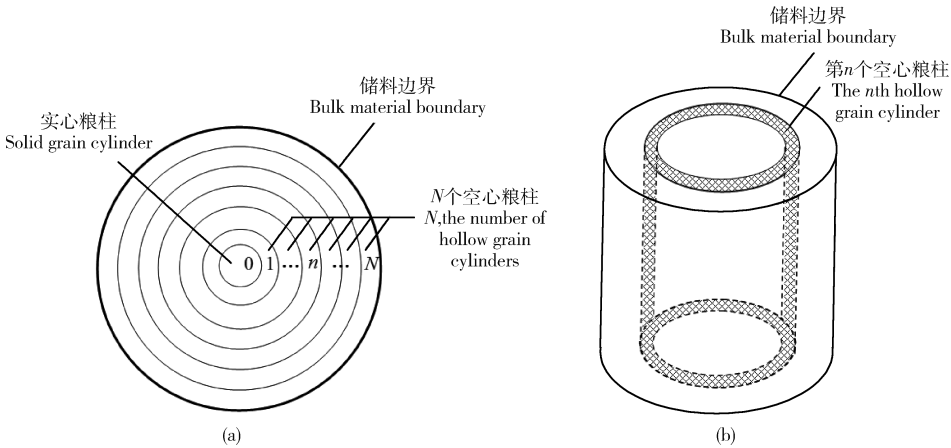


图 6 筒仓储料划分平面图(a)和空心粮柱三维示意图(b)

Fig. 6 Planar graph (a) and three-dimensional schematic diagram of hollow grain cylinder (b) of partition of bulk material in silo

2.2 计算方法

空心圆柱中微元的受力状态见图 7。

1)第 0 个圆柱(粮堆中心的实心粮柱)的压力。第 0 个圆柱的压力计算可采用 Janssen 公式,但式中参数都要替换为当前实心粮柱的参数。则实心粮柱范围内任一深度 z 处的竖向压力 σ_{z0} 为:

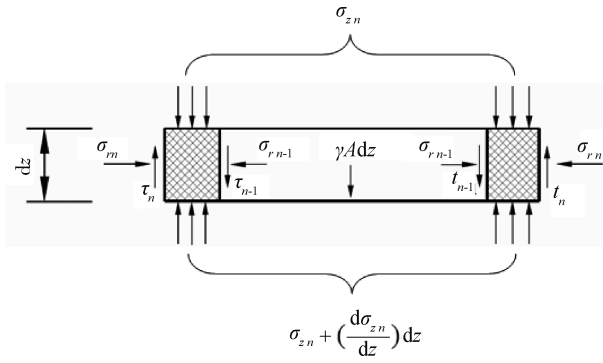
$$\sigma_{z0} = \frac{\gamma D_0}{4\mu_0 K} \left(1 - e^{-\frac{4\mu_0 Kz}{D_0}} \right) \quad (5)$$

式中: D_0 为第 0 个圆柱的直径; μ_0 为第 0 个圆柱外侧的有效摩擦系数; K 为储料侧压力系数。

中心柱范围内任一深度 z 处的径向水平压力 σ_{r0} 为:

$$\sigma_{z0} = \frac{\gamma D_0}{4\mu_0} \left(1 - e^{-\frac{4\mu_0 Kz}{D_0}} \right) \quad (6)$$

2)第 1 个空心圆柱的压力。第 1 个空心圆柱的竖向平衡方程为:



z 为粮堆深度; σ_{zn} 为第 n 个空心圆柱范围内深度 z 处的竖向压力; σ_m 和 σ_{m-1} 分别为第 n 个空心圆柱的外侧和内侧受到的径向水平压力; τ_n 和 τ_{n-1} 分别为第 n 个空心圆柱的外侧和内侧受到的竖向摩擦应力; γ 为储料容重; A 为空心圆柱的横截面积。

z is grain pile depth; σ_{zn} is the vertical pressure at the depth z within the range of the n th hollow cylinder; σ_m and σ_{m-1} are radial horizontal pressures on the outer and inner sides of the n th hollow cylinder, respectively; τ_n and τ_{n-1} are vertical friction stresses on the outside and inside of the n th hollow cylinder respectively; γ is unit weight; A is the cross-sectional area of the hollow cylinder.

图7 第 n 个空心圆柱上的粮堆微元受力状态

Fig. 7 The stress state of the grain pile infinitesimal on the n th hollow cylinder

$$\frac{d\sigma_{z1}}{dz} + \frac{4(D_1\tau_1 - D_0\tau_0)}{D_1^2 - D_0^2} = \gamma \quad (7)$$

式中: σ_{z1} 为第 1 个空心圆柱范围内深度 z 处的竖向压力; τ_1 和 τ_0 分别为第 1 个空心圆柱的外侧和内侧(第 1 个空心圆柱的内侧也即第 0 个圆柱的外侧)受到的竖向摩擦应力; D_1 为第 1 个空心圆柱的直径。

粮堆微元的摩擦应力 τ_0 、 τ_1 分别为:

$$\tau_0 = \mu_0\sigma_{r0} \quad (8)$$

$$\tau_1 = \mu_1\sigma_{r1} \quad (9)$$

式中: σ_{r1} 和 σ_{r0} 分别为第 1 个空心圆柱的外侧和内侧受到的径向水平压力; μ_1 为第 1 个圆柱外侧的有效摩擦系数。

径向水平压力 σ_{1f} 、 σ_{r1} 分别为:

$$\sigma_{r0} = K\sigma_{z0} \quad (10)$$

$$\sigma_{r1} = K\sigma_{z1} \quad (11)$$

将式(8)~(11)代入式(7),则有:

$$\frac{d\sigma_{z1}}{dz} + \frac{4KD_1\mu_1\sigma_{z1}}{D_1^2 - D_0^2} = \gamma + \frac{4KD_0\mu_0\sigma_{z0}}{D_1^2 - D_0^2} \quad (12)$$

边界条件为:

$$\sigma_{z1}|_{z=0} = 0 \quad (13)$$

对式(12)求解,结合式(13)、式(5),得到第 1 个空心圆柱范围内任一深度 z 处的竖向应力 σ_{z1} :

$$\begin{aligned} \sigma_{z1} = & \frac{\gamma D_1}{4K\mu_1} + \frac{\gamma D_0^2 (-e^{-4Kz\frac{\mu_0}{D_0}})}{4K(D_1\mu_1 - \frac{\mu_0(D_1^2 - D_0^2)}{D_0})} + \\ & \left[-\frac{\gamma D_1}{4K\mu_1} + \frac{\gamma D_0^2}{4K(D_1\mu_1 - \frac{\mu_0(D_1^2 - D_0^2)}{D_0})} \right] e^{\frac{-4KD_1\mu_1 z}{D_1^2 - D_0^2}} = \\ & \frac{\gamma D_1}{4K\mu_1} (1 - e^{\frac{-4KD_1\mu_1 z}{D_1^2 - D_0^2}}) + \frac{\gamma D_0^2 (e^{\frac{-4KD_1\mu_1 z}{D_1^2 - D_0^2}} - e^{-4Kz\frac{\mu_0}{D_0}})}{4K(D_1\mu_1 - \frac{\mu_0(D_1^2 - D_0^2)}{D_0})} \end{aligned} \quad (14)$$

根据式(11),求得第 1 个空心圆柱范围内的径向水平压力 σ_{r1} 为:

$$\sigma_{r1} = K\sigma_{z1} \quad (15)$$

3) 第 2 个空心圆柱的压力。第 2 个空心圆柱压力的推导过程与第 1 个空心圆柱相似。第 2 个空心圆柱的竖向平衡方程可写为:

$$\frac{d\sigma_{z2}}{dz} + \frac{4KD_2\mu_2\sigma_{z2}}{D_2^2 - D_1^2} = \gamma + \frac{4KD_1\mu_1\sigma_{z1}}{D_2^2 - D_1^2} \quad (16)$$

式中: D_2 为第 2 个圆柱的直径; μ_2 为第 2 个圆柱外侧的有效摩擦系数; σ_{z2} 为第 2 个空心圆柱范围内深度 z 处的竖向压力。

至此,通过第 2 个空心圆柱推导得到的式子,在形式上与第 1 个空心圆柱完全相同。但由于 σ_{z0} 和 σ_{z1} 形式上的差异,若将 σ_{z1} 直接代入式(16),会使最终得到的压力结果在形式上更加复杂,不利于通过一个公式进行迭代计算。为了避免此种情况的发生,使推导过程和结果与第 1 个空心圆柱在形式上是相同的,将第 1 个空心圆柱竖向压力 σ_{z1} 作如下变换。若 $\Delta D_1 = D_1 - D_0$, 则当 ΔD_1 很小时,有

$$\begin{aligned} \sigma_{z1} = & \frac{\gamma D_1}{4K\mu_1} (1 - e^{\frac{-4KD_1\mu_1 z}{D_1^2 - D_0^2}}) + \\ & \frac{\gamma D_0^2 (e^{\frac{-4KD_1\mu_1 z}{D_1^2 - D_0^2}} - e^{-4Kz\frac{\mu_0}{D_0}})}{4K(D_1\mu_1 - \frac{\mu_0(D_1^2 - D_0^2)}{D_0})} \approx \frac{\gamma D_1}{4\mu_1 K} (1 - e^{\frac{-4\mu_1 K z}{D_1}}) \end{aligned} \quad (17)$$

特别的,当 $\Delta D_1 = 0$ 时,式(17)中约等号可替换为等号。之后推导过程中得到的式子与第 1 个空心圆柱在形式上是相同的。最终得到第 2 个空心圆柱范围内任一深度 z 处的竖向应力 σ_{z2} 为:

$$\begin{aligned} \sigma_{z2} = & \frac{\gamma D_2}{4K\mu_2} (1 - e^{\frac{-4KD_2\mu_2 z}{D_2^2 - D_1^2}}) + \\ & \frac{\gamma D_1^2 (e^{\frac{-4KD_2\mu_2 z}{D_2^2 - D_1^2}} - e^{-4Kz\frac{\mu_1}{D_1}})}{4K(D_2\mu_2 - \frac{\mu_1(D_2^2 - D_1^2)}{D_1})} \end{aligned} \quad (18)$$

第 2 个空心圆柱范围内的径向水平压力 σ_{r2} 为：

$$\sigma_{r2} = K\sigma_{z2} \quad (19)$$

4) 第 n 个圆柱的压力。第 $n(n=0, 1, 2, \dots, N)$ 个圆柱通过归纳法得到。第 0 个圆柱指中心实心圆柱, 其余圆柱均指空心圆柱, 并规定 $D_{-1} = 0, \mu_{-1} = 0$ 。通过归纳, 可得到第 n 个圆柱范围内任一深度 z 处的竖向应力 σ_{zn} 为：

$$\sigma_{zn} = \frac{\gamma D_n}{4K\mu_n} (1 - e^{-\frac{4KD_n\mu_n z}{D_n^2 - D_{n-1}^2}}) + \frac{\gamma D_{n-1}^2 (e^{-\frac{4KD_n\mu_n z}{D_n^2 - D_{n-1}^2}} - e^{-4Kz\frac{\mu_{n-1}}{D_{n-1}}})}{4K(D_n\mu_n - \mu_{n-1}(D_n^2 - D_{n-1}^2))} \quad (20)$$

第 n 个圆柱范围内任一深度 z 处的水平应力 σ_m 为：

$$\sigma_m = K\sigma_{zn} \quad (21)$$

当 $D_{-1} = 0, \mu_{-1} = 0$ 时, 不必规定 μ_{-1}/D_{-1} 的值, 因为无论它是有限大小, 还是零或无穷大, 当 $n=0$ 时, 式(20)均可变为中心实心柱的结果, 即式(5)。当 $D_{n-1} = 0$ 时, 同时令 $D_1 = D_0$, 即空心圆柱的式(20)

亦可退化为实心圆柱的式(5)。

式(20)和式(21)说明, 当储料和仓壁的力学参数确定时, 任何一个圆柱的压力只和该圆柱及内侧相邻圆柱的外径 D_n, D_{n-1} 以及该圆柱及内侧相邻圆柱的有效摩擦系数 μ_n, μ_{n-1} 这 4 个参数有关。

3 筒仓储料静态压力场计算方法的算例验证

依据该计算方法的基本思想以及式(4)、式(18)、式(19), 编制了用于计算筒仓储料静态压力场的 Matlab 程序, 只需输入筒仓直径、装粮高度、储料容重、内摩擦角、外摩擦系数(储料与仓壁间最大静摩擦系数)等参数, 便可给出粮堆任意一点的压力(包括竖向压力、水平压力等)数据与图形。

算例 1。筒仓几何属性和储料材料属性为: 筒仓直径 16 m, 装粮高度 6.35 m, 粮堆密度 804 kg/m^3 , 内摩擦角 25° (内摩擦系数 0.47), 外摩擦系数 0.40; 高径比 0.4, 属于浅仓。粮堆不同深度处竖向压力 p_v 、径向水平压力 p_h 以及粮堆仓壁处筒仓水平侧压力 $p_{w,h}$ 的本研究结果与有限元结果对比见图 8。

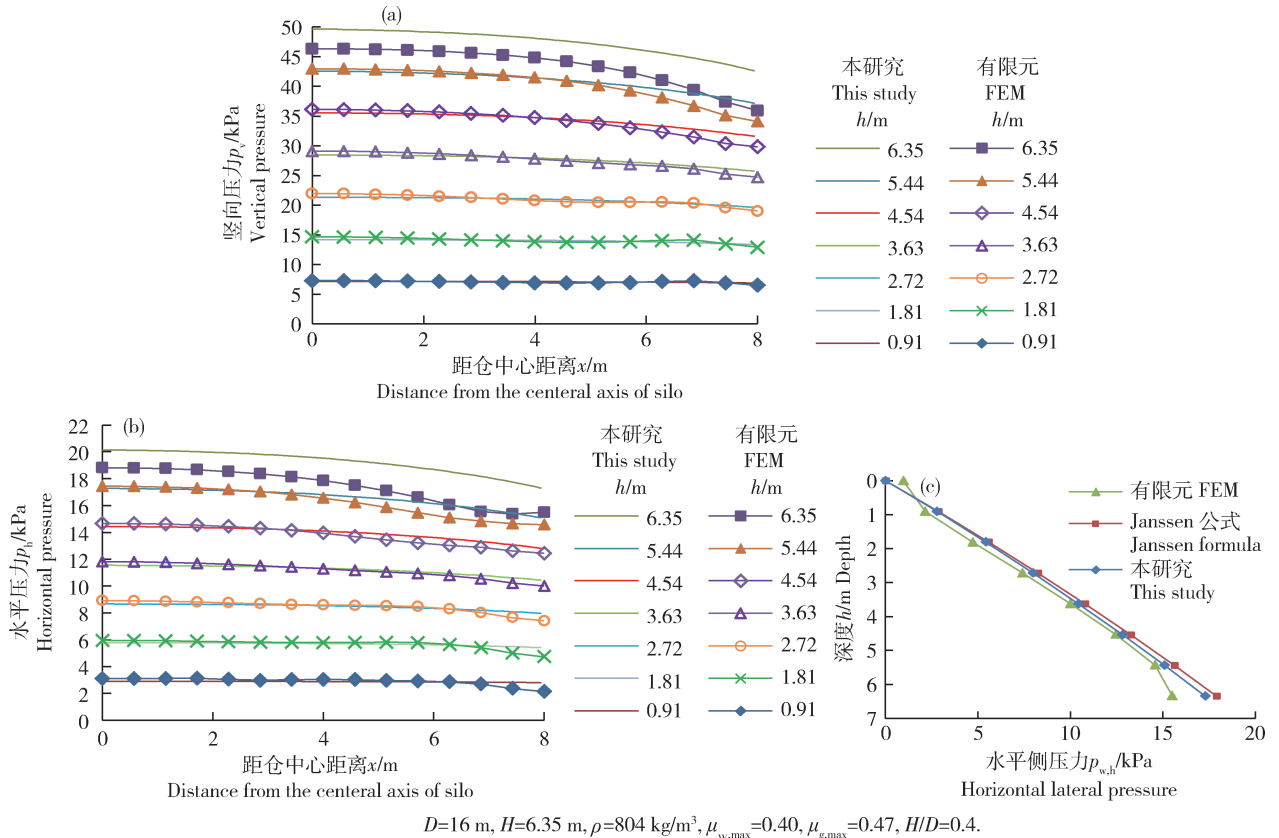


图 8 算例 1 不同计算方法得到的粮堆不同深度竖向压力 (a)、径向水平压力 (b) 及仓壁水平侧压力 (c)

Fig. 8 Vertical pressure (a), radial horizontal pressure (b) and horizontal lateral pressure on silo wall (c) at different depths of grain pile obtained by different calculation methods in example 1

算例2。筒仓几何属性和储料材料属性为:筒仓直径16 m,装粮高度10 m,粮堆密度 804 kg/m^3 ,内摩擦角 25° (内摩擦系数0.47),外摩擦系数0.40;

高径比为0.6,属于浅仓。粮堆不同深度处竖向压力 p_v 、径向水平压力 p_h 以及粮堆仓壁处筒仓水平侧压力 $p_{w,h}$ 的本研究结果与有限元结果对比见图9。

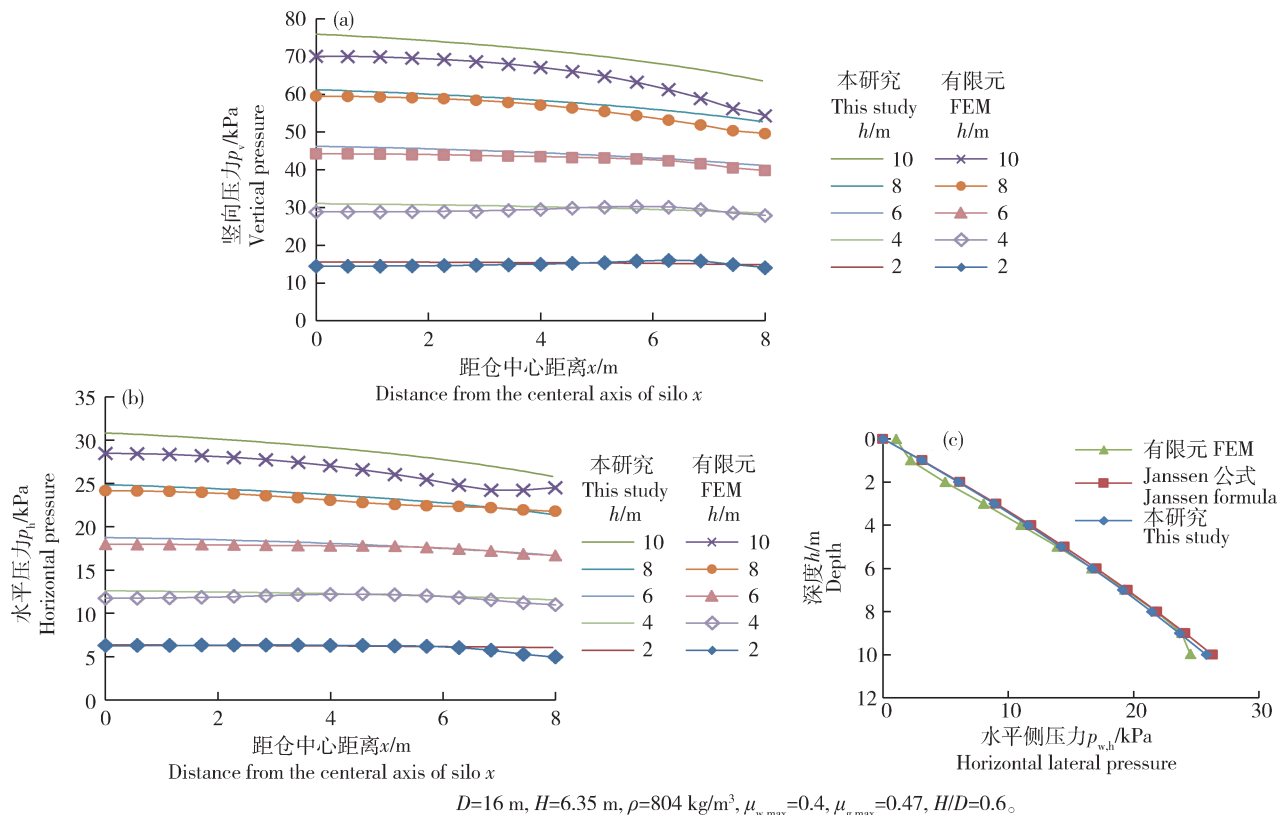


图9 算例2不同计算方法得到的粮堆不同深度竖向压力(a)、径向水平压力(b)和仓壁水平侧压力(c)

Fig. 9 Vertical pressure (a), radial horizontal pressure (b) and horizontal lateral pressure on silo wall (c) at different depths of grain pile obtained by different calculation methods in example 2

从以上2个算例可以看出,采用本研究计算方法能够得到同一水平面上竖向压力分布的非均匀性。

利用本研究计算方法得到的粮堆内部不同深度处竖向压力、水平压力与有限元模拟结果存在差异,两者之间竖向压力相差较大,水平压力相差较小。同时,随着粮堆深度的增加,本研究结果与有限元模拟结果之间的差异逐渐增大。这都是因为本研究计算方法在推导过程中采用式(19)来规定了竖向压力与水平压力之间的关系,致使出现上述结果,今后可对侧压力系数 K (转向比)进行研究,给出其较准确的表达式。从算例1和算例2可以看出,对于装粮高度较小或高径比较小的筒仓,在粮堆相同深度处,本研究结果与有限元模拟结果之间的差异随着距仓中心距离的增加逐渐增大,仓壁附近的差异明显大于其他位置。

对于仓壁水平压力的计算,本研究结果、有限元模拟结果和Janssen公式结果三者相差不大。在粮面处出现有限元模拟结果 $>0 \text{ kPa}$ 的现象(粮堆在自重作用下发生微小沉降,对仓壁产生很小的水平压力),而本研究计算方法和Janssen公式在粮面处水平压力的值均为 0 kPa 。在粮堆底部,有限元模拟结果陡然减小,本研究计算方法和Janssen公式则逐渐缓慢地减小。从算例1和算例2可以看出,除粮面附近,利用本研究计算方法得到的仓壁水平压力与粮堆深度关系的曲线基本在有限元模拟结果与Janssen公式结果之间。

4 结论

本研究基于粮堆有效摩擦系数分布规律,通过对仓内储料进行划分并采用微元体静力平衡分析,提出筒仓储料静态压力场计算方法。该方法不仅能

够计算筒仓仓壁上的侧压力,并且能够计算储料内部的竖向压力和水平压力,能够得到同一水平面上竖向压力分布的非均匀性。采用本研究计算方法得到的粮堆内部不同深度处的压力,与有限元模拟结果相比较,两者存在一定差异。对于筒仓仓壁水平压力的计算,采用本研究提出的筒仓储料静态压力场计算方法得到的结果,与有限元模拟结果和 Janssen 公式计算结果相比较,三者相差不大。

参考文献 References

- [1] Wang Y, Lu Y, Ooi J Y. A numerical study of wall pressure and granular flow in a flat-bottomed silo[J]. *Powder Technology*, 2015, 282: 43-54
- [2] Wang Y, Lu Y, Ooi J Y. Finite element modelling of wall pressures in a cylindrical silo with conical hopper using an Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation[J]. *Powder Technology*, 2014, 257: 181-190
- [3] Ruiz A, Couto A, Aguado P J. Design and instrumentation of a mid-size test station for measuring static and dynamic pressures in silos under different conditions-Part II: Construction and validation[J]. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2012, 85: 174-187
- [4] 周长东, 郭坤鹏, 孟令凯, 张晓阳. 钢筋混凝土筒仓散料的静力相互作用分析[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2015, 43(11): 1656-1661, 1669
Zhou C D, Guo K P, Meng L K, Zhang X Y. Static interaction analysis of RC silo structure-granular material[J]. *Journal of Tongji University: Natural Science*, 2015, 43(11): 1656-1661, 1669 (in Chinese)
- [5] Guo K P, Zhou C D, Zhang X Y, Meng L K. Lateral pressure of RC silos with static and dynamic granular materials [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2015, 22(4): 92-98
- [6] Ding S, Rotter J M, Ooi J Y, Enstad G, Xu D. Normal pressures and frictional tractions on shallow conical hopper walls after concentric filling: Predictions and experiments [J]. *Chemical Engineering Science*, 2013, 89: 264-272
- [7] Gallego E, Ruiz A, Aguado P J. Simulation of silo filling and discharge using ANSYS and comparison with experimental data[J]. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2015, 118: 281-289
- [8] Gonzalez-Montellano C, Gallego E, Ramirez-Gomez A, Ayuga F. Three dimensional discrete element models for simulating the filling and emptying of silos: Analysis of numerical results [J]. *Computers and Chemical Engineering*, 2012, 40: 22-32
- [9] Horabik J, Parafiniuk P, Molenda M. Experiments and discrete element method simulations of distribution of static load of grain bedding at bottom of shallow model silo[J]. *Biosystems Engineering*, 2016, 149: 60-71
- [10] Ding S, Ji Y, Ye S B, Rotter J M, Li Q. Measurements of pressure and frictional tractions along walls of a large-scale conical shallow hopper and comparison with Eurocode 1991-4: 2006[J]. *Thin-Walled Structures*, 2014, 80: 231-238.
- [11] Couto A, Ruiz A, Herráez L, Moran J, Aguado P J. Measuring pressures in a slender cylindrical silo for storing maize. Filling, static state and discharge with different material flow rates and comparison with Eurocode 1 part 4 [J]. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2013, 96(12): 40-56
- [12] Fank M Z, do Nascimento J W B, Cardoso D L, Meira A S, Willrich F L. Vertical pressures and compressive friction force in a large silo[J]. *Engenharia Agrícola*, 2018, 38(4): 498-503
- [13] 原方. 曲线挡墙内侧散粒体压力分析及工程应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2004
Yuan F. Analysis of granular material pressure on curved retaining wall and engineering application [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2004 (in Chinese)
- [14] 原方, 邵兴, 王录民, 崔元瑞. 一种新的浅圆仓散料侧压力计算方法[J]. 工程力学, 2004(3): 96-100
Yuan F, Shao X, Wang L M, Cui Y R. A method for calculating lateral pressures on squat silo walls[J]. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(3): 96-100 (in Chinese)
- [15] 原方, 邵兴, 崔元瑞. 大直径浅圆仓贮料侧压力实用计算方法[J]. 特种结构, 2003, 20(2): 16-19
Yuan F, Shao X, Cui Y R. A practical method for wall pressure calculation of big diameter squat silo[J]. *Special Structures*, 2003, 20(2): 16-19 (in Chinese)
- [16] 陈长冰. 筒仓内散体侧压力沿仓壁分布研究[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2006
Chen C B. Research on distribution of lateral bulk-solid pressures on silo's walls[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2006 (in Chinese)
- [17] 张磊. 曲线挡墙散粒体主动侧压力分析及筒仓实践[D]. 长沙: 中南大学, 2009
Zhang L. Analysis of active lateral pressure of granular material on curved retaining wall and silo practice[D]. Changsha: Central South University, 2009 (in Chinese)
- [18] 刘定华, 魏宜华. 钢筋混凝土筒仓侧压力的计算与测试[J]. 建筑科学, 1998, 14(4): 14-18
Ling D H, Wei Y H. Calculation and testing of lateral pressure in a reinforced concrete silo [J]. *Building Science*, 1998, 14(4): 14-18 (in Chinese)
- [19] 冯云田, 华云龙. 适用于柔性圆筒仓的修正的 Janssen 公式[J]. 中国农业大学学报, 1996, 1(4): 107-111
Feng Y T, Hua Y L. Modified Janssen formula for flexible circular bins[J]. *Journal of China Agricultural University*, 1996, 1(4): 107-111 (in Chinese)
- [20] Horabik J, Molenda M. Distribution of static pressure of seeds in a shallow model silo[J]. *International Agrophysics*, 2017, 31(2): 167-174
- [21] 陈家豪, 韩阳, 许启铿, 段君峰, 杜海洋. 高大平房仓散装粮堆底部压力的试验研究[J]. 河南工业大学学报: 自然科学版, 2016, 37(2): 22-25
Chen J H, Han Y, Xu Q K, Duan J F, Du H Y. The bottom pressure of granular grain pile in large warehouse [J]. *Journal of Henan University of Technology: Natural Science Edition*, 2016, 37(2): 22-25 (in Chinese)