

拱形屋面温室纵向抗风分析中的曲梁刚度矩阵模型

郭韦佟¹ 朱丹¹ 宓林² 蒋秀根^{1*}

(1. 中国农业大学水利与土木工程学院,北京 100083;

2. 清华大学基建规划处,北京 100084)

摘要 研究拱形温室纵向抗风分析中的屋面拱结构。考虑弯扭耦合的影响,在对其几何方程、平衡方程、物理方程分析的基础上,建立了曲梁扭转角和弯曲挠度的控制方程;求得了用基函数向量以及积分常数向量表达的曲梁扭转角和弯曲挠度的解析解;根据位移边界条件,得到了位移系数;根据曲梁内力方程,建立了以矩阵形式表达的刚度平衡方程;经矩阵变换得到了曲梁弯扭分析的刚度矩阵模型以及等效节点力向量。本模型基于梁的刚度平衡方程,采用了精确的解析解,以矩阵形式表达了梁节点位移与节点力之间的关系,利用该模型,可对拱形温室的纵向抗风性能进行分析。

关键词 拱形屋面温室;纵向抗风;曲梁;弯扭耦合;刚度矩阵

中图分类号 TU261

文章编号 1007-4333(2017)10-0113-07

文献标志码 A

Curved beam stiffness matrix model for the longitudinal wind resistance analysis of arch roof greenhouse

GUO Weitong¹, ZHU Dan¹, MI Lin², JIANG Xiugen^{1*}

(1. College of Water Resources and Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China;

2. Construction and Campus Planning Office, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract In order to study roof arch structure in the longitudinal wind resistance analysis of arched greenhouse, its torsion angle and bending deflection control equation considering bending-torsion coupling were developed based on the geometric equations, equilibrium equations and physics equations of curved beam. The analytical solutions of torsion angle and bending deflection expressed by primary function vector and integration constant were derived. The displacement coefficient was then obtained according to displacement boundary condition, and the stiffness equilibrium equation in matrix was established in line with equations of internal forces. After matrix transformation, stiffness matrix model and equivalent nodal force vector for the bending-torsion coupling analysis of curved beam were achieved. The model was constructed based on the stiffness equilibrium equation and accurate analytical solution. Nodal displacement and force were expressed in matrix according to this model. By using this model, the longitudinal wind resistant performance of arch greenhouse could be analyzed.

Keywords arch greenhouse; longitudinal wind resistance; curved beam; bending-torsion coupling; stiffness matrix

风荷载是温室结构设计中需要考虑的基本荷载^[1-3],极端风灾下温室垮塌事故十分普遍,与极端雪灾共同成为温室事故的主要原因。已有研究^[4]曾给出风荷载作用下温室结构内力和变形计算的解析方法和模型。温室风灾毁损高发的原因主要为:体

型复杂、建筑风压群效应复杂,表面风压复杂;结构刚度小、静力变形大、风振效应强;整体性弱,纵向抗风能力薄弱、计算模型(简化成等直梁)纵向风效应分析精度较差(忽略了弯扭耦合及约束扭转效应)。

收稿日期:2016-12-20

基金项目:农业部农业设施结构工程重点实验室开放课题(201502);国家自然科学基金项目(51279206)

第一作者:郭韦佟,硕士研究生,E-mail:guoweitong@cau.edu.cn

通讯作者:蒋秀根,教授,主要从事结构工程研究,E-mail:jiangxg@cau.edu.cn

因此,提高温室结构的抗风性能必须从提高整体结构性能出发,对结构进行整体分析与设计。关键在于以下2个方面:提高结构的整体性或整体刚度;针对温室结构构件的特点,提高温室结构空间效应分析的精度^[5-6]。

拱形屋面温室在温室中属量大面广的温室型式之一,包括各种塑料拱棚、日光温室及拱形连栋温室。拱形屋面温室屋面多采用塑料薄膜覆盖,这种温室屋面坡度较缓、空间利用率大、室内光照充裕、屋面的采光效果相对合理、节能效果好、保温性能突出^[7];结构上更适合大跨度结构的受力要求,因而在温室工程中被广泛采用。

在力学模型中,通常将承受竖向荷载以及横向荷载、受力变形呈现压弯耦合的拱形屋面支撑结构称之为拱结构;而将承受纵向水平荷载、受力变形呈现弯扭耦合的拱形屋面支撑结构称之为曲梁结构,换言之,曲梁是拱平面外受力的一种结构形式。

本研究讨论拱的平面外受力,对应的荷载是由山墙、檩条、纵向支撑传给屋面拱结构的纵向风荷载。属典型的曲梁问题。曲梁是一个受力较为复杂的结构,在分析中需要用到复杂的几何方程,只有圆轴线曲梁才能得到解析解,对于超静定非圆形的曲线梁完全无法给出简便、精确、实用的计算模型,所以在实际土木桥梁工程中,或者将曲线梁布置成由一个或若干个圆弧组成的圆曲梁,或者将非圆曲梁简化为若干圆弧的组合。本研究用圆形的曲梁来近似各种曲线形的屋面支撑结构。

根据曲梁弯扭基本理论,已有研究^[8-11]提出了各类静力解法和能量方法,解决了少数简单工况下的曲梁内力及位移计算问题,对于复杂工况、复杂曲梁的结构分析,静力法和能量法均无法得到满意解。为了有效解决曲梁的受力变形分析,已有研究还提出了各类数值计算方案。有限元方法是最常用的一种数值计算方法,是用来解决各类曲梁在不同荷载下的结构受力变形分析的通用、高效方法。在实际分析中,曲梁结构的分析或采用离散的直梁单元^[12-15],未考虑弯扭耦合作用、且分析效率低下;或采用插值形函数单元构造的曲梁单元,这类单元所采用的位移形函数与曲梁实际位移差异较大,不能充分反映曲梁的受力变形特点。用来分析曲梁时存在单元精度较低的问题,这样的模型方法,需要将曲梁划分较多的单元,计算效率较低。

因此,研究并建立基于静力法的刚度矩阵法,成

为提高拱形温室纵向抗风计算分析中的有效方法。刚度矩阵法(又称矩阵位移法、直接刚度法)是根据梁的刚度方程、用矩阵形式表达梁节点位移与节点力关系的,用来求解直梁系结构一种方法。刚度矩阵法在表达形式上与有限元法类似,但没有采用梁内(单元内)位移分布的近似表达方式,因而具有与有限元法相同的规则性和适用性,但又具备更高的分析精度^[16]。

本研究拟以曲梁基本方程为基础,对拱形温室纵向抗风分析中的曲梁结构进行分析,以期得到曲梁竖向弯扭的解析位移及曲梁内力方程,进而得到曲梁的节点力与节点位移方程,从而建立考虑曲梁弯扭耦合变形特征的刚度矩阵模型。

1 基本原理

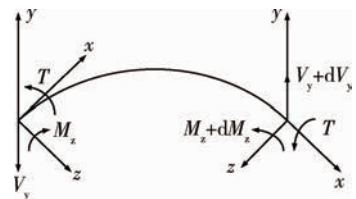
1.1 曲梁及其物理量

1.1.1 曲梁几何参数

本研究采用的曲梁是半径为 r 、圆弧所对圆心角为 φ 的圆形平曲梁,单梁总长度为 l ,有 $dl=r d\varphi$ 。曲梁只承受竖向荷载,不考虑平面内弯曲和压缩。

1.1.2 坐标系及内力

按照右手螺旋法则定义坐标系,轴向坐标 x 为杆件轴线方向,向右为正, y 轴垂直于曲轴平面,竖向向上为正, z 轴在曲轴平面内,垂直于轴线,径向,指向曲心为正,坐标零点位于梁左端(图1)。同时,对于曲梁,其内力包括:总扭矩 T ,平面外弯矩 M_z ,剪力 V_y ,当截面外法线方向与坐标轴方向一致时,内力定义为与坐标轴方向一致为正;当截面外法线方向与坐标轴正向相反时,内力定义为与坐标轴方向相反为负。



x, y, z 分别为杆件轴线方向, 竖直方向和径向; T, M_z 分别为总扭矩和平面外弯矩, $N \cdot m$; V_y 为剪力, N 。

x, y and z are axis directions of the bar, vertical directions and radial directions; T, M_z are total torque and out-plane bending moment, $N \cdot m$; V_y is vertical shear force, N .

图1 曲梁坐标系及内力方向示意图

Fig. 1 Coordinate system and internal force direction of curved beam

1.2 几何方程

微段绕 x 轴的扭率 κ_x 为:

$$\kappa_x = \frac{d\theta_x}{dx} - \frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \quad (1)$$

式中: θ_x 为截面扭转角; v 为梁的竖向线位移。微段绕 z 轴的曲率 κ_z 为:

$$\kappa_z = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\theta_x}{r} \quad (2)$$

1.3 平衡方程

轴向力矩平衡方程为:

$$\frac{dT}{dx} - \frac{M_z}{r} = -m_x \quad (3)$$

式中: m_x 为 x 方向的均布力矩。平面外力平衡方程为:

$$\frac{dV_y}{dx} = -q_y \quad (4)$$

式中: q_y 为 y 方向的均布力。径向力矩平衡方程为:

$$\frac{dM_z}{dx} + \frac{T}{r} + V_y = -m_z \quad (5)$$

式中: m_z 为 z 方向的均布力矩。

1.4 物理方程

扭转变形为:

$$T = -EI_w \frac{d^2\kappa_x}{dx^2} + GI_d \kappa_x \quad (6)$$

式中: E 为材料弹性模量; I_w 为扇性惯性矩; I_d 为截面绕 x 轴的抗扭惯性矩; κ_x 为微段绕 x 轴的曲率。弯曲变形为:

$$M_z = EI_z \kappa_z \quad (7)$$

式中: I_z 为截面绕 z 轴的抗弯惯性矩; κ_z 为微段绕 z 轴的曲率。

2 控制方程

综合式(1)~(7),得:

$$\begin{aligned} & EI_w \frac{d^6\theta_x}{dx^6} + \left(\frac{2EI_w}{r^2} - GI_d \right) \frac{d^4\theta_x}{dx^4} + \\ & \frac{1}{r^2} \left(\frac{EI_w}{r^2} - 2GI_d \right) \frac{d^2\theta_x}{dx^2} - \frac{GI_d}{r^4} \theta_x = \\ & \left(\frac{EI_w}{r^2 EI_z} + 1 \right) \frac{d^2 m_x}{dx^2} - \frac{GI_d}{r^2 EI_z} m_x - \\ & \frac{EI_w}{r EI_z} \frac{d^3 m_z}{dx^3} + \frac{1}{r} \left(\frac{GI_d}{EI_z} + 1 \right) \frac{d m_z}{dx} + \\ & \frac{EI_w}{r EI_z} \frac{d^2 q_y}{dx^2} - \frac{1}{r} \left(\frac{GI_d}{EI_z} + 1 \right) q_y \end{aligned} \quad (8)$$

综合式(1)~(2)、(4)~(7),得:

$$\begin{aligned} & \left(EI_z + \frac{EI_w}{r^2} \right) \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{GI_d}{r^2} \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{EI_w}{r} \frac{d^4 \theta_x}{dx^4} + \\ & \left(\frac{EI_z}{r} + \frac{GI_d}{r} \right) \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} + \frac{d m_z}{dx} - q_y = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

综合式(1)~(3)、(6)~(7),得:

$$\begin{aligned} & \frac{EI_w}{r} \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{GI_d + EI_z}{r} \frac{d^2 v}{dx^2} - EI_w \frac{d^4 \theta_x}{dx^4} + \\ & GI_d \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} - \frac{EI_z}{r^2} \theta_x + m_x = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

3 微分方程求解

3.1 扭转角

式(8)两边乘以 $\frac{r^4}{GI_d}$,再令 $a^2 = \frac{EI_w}{GI_d}$,有:

$$\begin{aligned} & a^2 r^4 \frac{d^6 \theta_x}{dx^6} + (2a^2 r^2 - r^4) \frac{d^4 \theta_x}{dx^4} + \\ & (a^2 - 2r^2) \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} - \theta_x = r^2 \left(a^2 \frac{1}{EI_z} + \frac{r^2}{GI_d} \right) \frac{d^2 m_x}{dx^2} - \\ & \frac{r^2}{EI_z} m_x - a^2 \frac{r^3}{EI_z} \frac{d^3 m_z}{dx^3} + r^3 \left(\frac{1}{EI_z} + \frac{1}{GI_d} \right) \frac{d m_z}{dx} + \\ & a^2 \frac{r^3}{EI_z} \frac{d^2 q_y}{dx^2} - r^3 \left(\frac{1}{EI_z} + \frac{1}{GI_d} \right) q_y \end{aligned} \quad (11)$$

当曲梁承受均布荷载 q_y 及均布力矩 m_x, m_z 时,式(11)的解为:

$$\begin{aligned} \theta = & a_1 \cosh \frac{x}{a} + a_2 \sinh \frac{x}{a} + a_3 \cos \frac{x}{r} + \\ & a_4 x \cos \frac{x}{r} + a_5 \sin \frac{x}{r} + a_6 x \sin \frac{x}{r} + \\ & \frac{r^2}{EI_z} m_x + r^3 \left(\frac{1}{EI_z} + \frac{1}{GI_d} \right) q_y \end{aligned} \quad (12)$$

3.2 弯曲线位移

式(9)两边乘以 $\frac{r^2}{GI_d}$ 并令 $b^2 = \frac{r^2 EI_z + EI_w}{GI_d}$,得:

$$\begin{aligned} b^2 \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{d^2 v}{dx^2} = & r a^2 \frac{d^4 \theta_x}{dx^4} - \frac{b^2 - a^2 + r^2}{r} \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} - \\ & \frac{r^2}{GI_d} \frac{d m_z}{dx} + \frac{r^2}{GI_d} q_y \end{aligned} \quad (13)$$

当曲梁承受均布荷载 q_y 及均布力矩 m_x, m_z 时,综合式(12),式(13)的解为:

$$\begin{aligned} v = & c_1 + c_2 x + c_3 \cosh \frac{x}{b} + c_4 \sinh \frac{x}{b} - \\ & a_1 \frac{a^2}{r} \cosh \frac{x}{a} - a_2 \frac{a^2}{r} \sinh \frac{x}{a} + a_3 r \cos \frac{x}{r} + \\ & a_4 \left(r x \cos \frac{x}{r} + Y \sin \frac{x}{r} \right) + a_5 r \sin \frac{x}{r} + \\ & a_6 \left(r x \sin \frac{x}{r} - Y \cos \frac{x}{r} \right) - \frac{r^2}{2GI_d} q_y x^2 - \frac{b^2 r^2}{GI_d} q_y \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $Y = 2 \frac{a^2 - b^2}{b^2 + r^2} r^2$ 。由式(12)和式(14),并运用式(10)可得: $c_3 = 0, c_4 = 0$ 。再令 $a_7 = c_1, a_8 = c_2$, 则有:

$$v = -a_1 \frac{a^2}{r} \cosh \frac{x}{a} - a_2 \frac{a^2}{r} \sinh \frac{x}{a} + a_3 r \cos \frac{x}{r} + a_4 \left(rx \cos \frac{x}{r} + Y \sin \frac{x}{r} \right) + a_5 r \sin \frac{x}{r} + a_6 \left(rx \sin \frac{x}{r} - Y \cos \frac{x}{r} \right) + a_7 + a_8 x - \frac{r^2 q_y}{2GI_d} x^2 - \frac{b^2 r^2}{GI_d} q_y \quad (15)$$

4 位移及内力

4.1 位移

4.1.1 扭转角

由式(12)可得,扭转角方程为:

$$\theta = f_\theta a + \frac{r^2}{EI_z} m_x + r^3 \left(\frac{1}{EI_z} + \frac{1}{GI_d} \right) q_y \quad (16)$$

其中

$$f_\theta = \left\{ \begin{matrix} \cosh \frac{x}{a} & \sinh \frac{x}{a} & \cos \frac{x}{r} \\ x \cos \frac{x}{r} & \sin \frac{x}{r} & x \sin \frac{x}{r} & 0 & 0 \end{matrix} \right\}$$

$$a = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8]^T$$

显然

$$\theta' = f_\theta Z a \quad (17)$$

$$\theta'' = f_\theta Z Z a \quad (18)$$

$$\theta''' = f_\theta Z Z Z a \quad (19)$$

其中

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.1.2 弯曲线位移

由式(15)可得,弯曲挠度方程为:

$$v = f_v a - \frac{r^2 q_y}{2GI_d} x^2 - \frac{b^2 r^2}{GI_d} q_y \quad (20)$$

其中

$$f_v = \left\{ \begin{matrix} -\frac{a^2}{r} \cosh \frac{x}{a} \\ -\frac{a^2}{r} \sinh \frac{x}{a} \\ r \cos \frac{x}{r} \\ rx \cos \frac{x}{r} + Y \sin \frac{x}{r} \\ r \sin \frac{x}{r} \\ rx \sin \frac{x}{r} - Y \cos \frac{x}{r} \\ 1 \\ x \end{matrix} \right\}^T$$

显然

$$v' = f_v Z a - \frac{r^2 q_y}{GI_d} x \quad (21)$$

$$v'' = f_v Z Z a - \frac{r^2 q_y}{GI_d} \quad (22)$$

$$v''' = f_v Z Z Z a \quad (23)$$

4.2 内力

4.2.1 平面外弯矩

综合式(2)、(7)、(16)和(22)得:

$$M_z(x) = EI_z f_\theta Z Z a + \frac{EI_z}{r} f_\theta a + r m_x + r^2 q_y \quad (24)$$

4.2.2 扭矩

综合式(1)、(6)、(17)、(19)、(21)和(23),得到:

$$T = -EI_w f_\theta Z Z Z a + \frac{EI_w}{r} f_\theta Z Z a + GI_d f_\theta Z a - \frac{GI_d}{r} f_v Z a + r q_y x \quad (25)$$

4.2.3 剪力

综合式(5)、(24)和(25),得到:

$$V_y(x) = -EI_z f_v Z Z Z a - \frac{EI_z}{r} f_\theta Z a + \frac{EI_w}{r} f_\theta Z Z Z a - \frac{EI_w}{r^2} f_v Z Z Z a - \frac{GI_d}{r} f_\theta Z a + \frac{GI_d}{r^2} f_v Z a - q_y x - m_z \quad (26)$$

4.2.4 双力矩

综合式(1)、(18)和(22),得到:

$$B(x) = EI_w f_{\theta} ZZa - \frac{EI_w}{r} f_{\nu} ZZa + ra^2 q_y \quad (27)$$

5 积分常数定解

5.1 位移边界条件

对于一般曲梁,其节点位移见表 1。

表 1 曲梁节点位移

Table 1 The nodal displacement of curved beam

节点位置 Node position	$\theta(x)$	$\theta'(x)$	$v(x)$	$v'(x)$
$x=0$	θ_1	θ'_{x1}	v_1	v'_{x1}
$x=l$	θ_2	θ'_{x2}	v_2	v'_{x2}

5.2 积分常数

根据各截面位移计算公式及定解条件,可以得到位移系数定解方程为

$$Aa = \delta^e + \delta_q$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} f_{\theta,0}(0) & f'_{\theta,0}(0) & f_{v,0}(0) & f'_{v,0}(0) \\ f_{\theta,l}(l) & f'_{\theta,l}(l) & f_{v,l}(l) & f'_{v,l}(l) \end{bmatrix}^T$$

$$\delta^e = \{\theta_1 \quad \theta'_{x1} \quad v_1 \quad \theta_{z1} \quad \theta_2 \quad \theta'_{x2} \quad v_2 \quad \theta_{z2}\}^T$$

$$D = \left\{ \begin{array}{l} f_{\theta,0} Z(EI_w ZZ - GI_d E) + f_{v,0} Z \left(-\frac{EI_w}{r} ZZ + \frac{GI_d}{r} E \right) \\ -EI_w f_{\theta,0} ZZ + \frac{EI_w}{r} f_{v,0} ZZ \\ f_{\theta,0} Z \left(-\frac{EI_w}{r} ZZ + \frac{EI_z}{r} E + \frac{GI_d}{r} E \right) + f_{v,0} Z \left(\frac{EI_w}{r^2} ZZ + EI_z ZZ - \frac{GI_d}{r^2} E \right) \\ -\frac{EI_z}{r} f_{\theta,0} - EI_z f_{v,0} ZZ \\ -f_{\theta,l} Z(EI_w ZZ - GI_d E) - f_{v,l} Z \left(-\frac{EI_w}{r} ZZ + \frac{GI_d}{r} E \right) \\ EI_w f_{\theta,l} ZZ - \frac{EI_w}{r} f_{v,l} ZZ \\ -f_{\theta,l} Z \left(-\frac{EI_w}{r} ZZ + \frac{EI_z}{r} E + \frac{GI_d}{r} E \right) - f_{v,l} Z \left(\frac{EI_w}{r^2} ZZ + EI_z ZZ - \frac{GI_d}{r^2} E \right) \\ \frac{EI_z}{r} f_{\theta,l} + EI_z f_{v,l} ZZ \end{array} \right.$$

$$F_q = \{0 \quad -ra^2 q_y \quad m_z \quad -rm_x - r^2 q_y \quad rq_y l \\ ra^2 q_y \quad -q_y l - m_z \quad rm_x + r^2 q_y\}^T$$

所以,节点力向量 F^e 可表示为:

$$\delta_q = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{r^2}{EI_z} m_x - r^3 \left(\frac{1}{EI_z} + \frac{1}{GI_d} \right) q_y \\ 0 \\ \frac{b^2 r^2}{GI_d} q_y \\ 0 \\ -\frac{r^2}{EI_z} m_x - r^3 \left(\frac{1}{EI_z} + \frac{1}{GI_d} \right) q_y \\ 0 \\ \frac{r^2 q_y l^2}{2GI_d} + \frac{b^2 r^2}{GI_d} q_y \\ \frac{r^2 q_y l}{GI_d} \end{array} \right.$$

由定解方程,可以得到位移系数 a 为:

$$a = A^{-1} \delta^e + A^{-1} \delta_q$$

6 刚度矩阵

6.1 节点力向量

根据定义,杆端力 F^e 和杆端内力的关系为:

$$F^e = \{-T(0) \quad -B(0) \quad -V_y(0) \quad -M_z(0) \\ T(l) \quad B(l) \quad V_y(l) \quad M_z(l)\}^T$$

经运算,得:

$$F^e = Da + F_q = D(A^{-1} \delta^e + A^{-1} \delta_q) + F_q$$

其中:

$$F^e = DA^{-1} \delta^e + DA^{-1} \delta_q + F_q \quad (28)$$

6.2 刚度平衡方程

由式(28)可得到刚度平衡方程:

$$DA^{-1}\delta^e = F^e - DA^{-1}\delta_q - F_q \quad (29)$$

6.3 刚度矩阵

由式(29)可得到刚度矩阵 K 为:

$$K = DA^{-1}$$

6.4 等效节点力

将刚度矩阵带入式(29)中得:

$$K\delta^e = F^e - DA^{-1}\delta_q - F_q$$

所以,等效节点力 \tilde{F}_q 可表示为:

$$\tilde{F}_q = -DA^{-1}\delta_q - F_q$$

7 模型验证与分析

为验证本模型的精度和效率,采用理论解析法、刚度矩阵法、插值形函数等直梁有限单元法,对一个直径为 10 m,两端固支的半圆形曲梁进行

了分析。

算例中的曲梁截面尺寸为 400 mm×400 mm,圆弧所对圆心角为 π ,弹性模量和剪切模量分别为 206、82.4 GPa,分别计算其在 100 kN 的跨中集中力和 20 kN/m 的满跨均布力作用下的支座内力,结果见表 2。可见:采用传统有限单元计算曲梁内力时,即使划分为 8 个单元,计算内力误差仍高达 99.768%,要想得到更高精度的计算结果,须在支座附近加密单元,且需要进行多次试算。

采用本研究模型计算的曲梁内力,当曲梁承受均布荷载时,只需 1 个单元即可得到精确解;当曲梁承受跨中集中力时,采用 2 个单元得到的解与解析解的误差 $\leq 0.939\%$,完全可以满足工程精度要求,且计算效率高。

表 2 曲梁结构分析结果

Table 2 The analysis results of curved beam structure

荷载工况 Load condition	模型 Model	单元数 Unit number	支座弯矩 Support moment		支座扭矩 Support torsion		支座剪力 Support shear	
			计算值/ (kN·m)	相对 误差/%	计算值/ (kN·m)	相对 误差/%	计算值/ kN	相对 误差/%
			Calculated value	Relative error	Calculated value	Relative error	Calculated value	Relative error
跨中集中力 Concentrated load on middle span	解析解	—	250.000	—	90.000	—	50.000	—
	本研究模型	2	250.000	0.000	90.845	0.939	49.999	-0.000
	插值形函数 等直梁单元	2	28.171	-88.731	7.184	-92.018	50.000	0.000
		4	27.329	-89.068	2.665	-97.039	50.000	0.000
满跨均布力 Uniform force	解析解	—	500.000	—	148.778	—	157.080	—
	本研究模型	1	500.000	0.000	148.778	0.000	157.080	0.000
	插值形函数 等直梁单元	2	5.634	-98.873	1.437	-99.034	10.000	-93.634
		4	14.800	-97.040	1.685	-98.867	30.000	-80.901
		8	31.895	-93.621	0.345	-99.768	70.000	-55.437

8 结束语

本研究基于曲梁的平衡方程、几何方程和物理方程,推导出关于扭转角的 6 阶控制方程、关于竖向线位移的 4 阶控制方程及 2 个位移的几何协调方程。直接求解得到了含待定系数的扭转角及弯曲挠度方程表达式,位移系数个数与曲梁自由度数相同;

根据曲梁的几何边界条件,得到了位移系数;利用曲梁的自然边界条件,建立了曲梁刚度平衡方程,给出了单元刚度矩阵和等效结点力向量。

算例表明,采用本研究得到的曲梁单元刚度矩阵和等效节点力向量,通过求解线性方程组,得到曲梁关键节点的位移和内力,可以有效地解决曲梁在均布及集中力作用下的位移和内力计算,

避免了求解边值问题 6 阶微分方程组,且能得到精确解。

参考文献 References

- [1] 周长吉. 温室设计安全标准的制订及其要则探讨[J]. 农业工程学报, 2002, 18(增刊): 16-19
Zhou C J. Design standards on greenhouse safety and theirs essential items[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2002, 18(S): 16-19 (in Chinese)
- [2] 丁敏, 李密密, 施旭栋, 张鹏, 蒋秀根. 考虑覆盖材料蒙皮效应的温室结构稳定承载力计算[J]. 农业工程学报, 2016, 32(增刊 1): 224-232
Ding M, Li M M, Shi X D, Zhang P, Jiang X G. Stable bearing capacity calculation of greenhouse structures considering skin effect of covering material[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2006, 32(S1): 224-232 (in Chinese)
- [3] 雷隽卿, 王东霞, 蒋秀根, 李保明. 温室结构风振效应的数值模拟[J]. 中国农业大学学报, 2007, 12(4): 85-89
Lei J Q, Wang D X, Jiang X G, Li B M. Numerical analysis on wind vibration effect on greenhouse structure[J]. *Journal of China Agricultural University*, 2007, 12(4): 85-89 (in Chinese)
- [4] 蒋秀根, 尉锦三, 张丽莉. 考虑桁架刚度的温室结构风载效应分析方法[J]. 中国农业大学学报, 2005, 10(6): 70-74
Jiang X G, Ju J S, Zhang L L. Analytical method for wind load effect on greenhouse structure considering of truss deformations[J]. *Journal of China Agricultural University*, 2005, 10(6): 70-74 (in Chinese)
- [5] 蒋秀根, 雷隽卿. 温室结构刚度及空间作用的简化计算方法[J]. 烟台大学学报: 自然科学与工程版, 2002, 15(4): 286-291
Jiang X G, Lei J Q. A simple analysis method of the stiffness and space effectiveness of the greenhouse structure [J]. *Journal of Yantai University: Natural Science and Engineering Edition*, 2002, 15(4): 286-291 (in Chinese)
- [6] 丁敏, 朱丹, 许晶, 蒋秀根, 李密密. 风雪荷载作用下 Venlo 型温室结构整体性能研究[J]. 中国农业大学学报, 2017, 22(1): 120-128
Ding M, Zhu D, Xu J, Jiang X G, Li M M. Space robustness of Venlo greenhouse structure under wind and snow load[J]. *Journal of China Agricultural University*, 2007, 22(1): 120-128 (in Chinese)
- [7] 周长吉, 王应宽. 中国现代温室的主要型式及其性能[J]. 农业工程学报, 2001, 17(1): 16-21
Zhou C J, Wang Y K. Modern greenhouses and their performances in China[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2001, 17(1): 16-21 (in Chinese)
- [8] Vlasov V Z. *Thin-Walled Elastic Beam* [M]. Jerusalem, Israel: Program for scientific translation, 1961
- [9] Yoo C H. Flexural-torsional stability of curved beams[J]. *Journal of Engineering Mechanics Division*, 1982, 110: 148-149
- [10] Yang Y B, Kuo S R. Effect of curvature on stability of curved beams[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1987, 113: 1185-1202
- [11] 姚玲森. 曲线梁[M]. 北京: 人民交通出版社, 1989
Yao L S. *Curved Beam* [M]. Beijing: China Communications Press, 1989 (in Chinese)
- [12] 刘磊, 许克宾. 曲杆结构非线性分析中的直梁单元和曲梁单元[J]. 铁道学报, 2001, 23(6): 72-76
Liu L, Xu K B. Curved-beam element and straight-beam element used in the nonlinear analysis of curved frame structures[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2001, 23(6): 72-76 (in Chinese)
- [13] 刘磊, 许克宾. 结构分析中的曲梁单元[J]. 北方交通大学学报, 2002, 26(4): 20-23
Liu L, Xu K B. Curved-beam elements in the analysis of curved frame structures [J]. *Journal of Northern Jiaotong University*, 2002, 26(4): 20-23 (in Chinese)
- [14] Yang Y B, Kuo S R, Yau J D. Use of straight-beam approach to study buckling of curved beams[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1990, 117: 1963-1978
- [15] Bickford W B, Storm B T. Vibration of plane curved beams[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1975, 39: 135-146
- [16] 龙驭球, 包世华, 袁驷. 结构力学[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2012
Long Y Q, Bao S H, Yuan S. *Structural Engineering* [M]. Third edition. Beijing: Higher Education Press, 2012 (in Chinese)

责任编辑: 刘迎春