

应用间断有限元方法求解一维对流占优土壤水流问题

黄文竹

(中国农业大学 资源与环境学院,北京 100193)

摘要 在某些特定条件下, Richards 方程的解在时空上呈现陡峭的锋面。为能有效地模拟具有对流占优特性的非饱和多孔介质中的水流问题, 推广一种内部惩罚间断有限元 (Interior penalty discontinuous Galerkin, IPDG) 方法应用于一维非饱和土壤水入渗问题的模拟。针对具有 van Genuchten-Mualem 模型和 Dirichlet 入渗边界条件的 Richards 方程, 分别采用间断有限元法和标准有限元方法求解。借助于相对 L_2 模和相对最大模误差进行讨论。几种不同质地的均质土壤水入渗的数值算例结果表明: 相比标准有限元方法, 间断有限元方法在选取的 4 种不同网格剖分单元结点上能够有效地模拟非饱和对流占优土壤水流问题, 并且能够获得准确的全局质量守恒。

关键词 土壤水流; 对流占优; Richards 方程; 间断有限元

中图分类号 S 152.7

文章编号 1007-4333(2015)01-0150-07

文献标志码 A

Application of the discontinuous Galerkin method to simulate convection-dominated soil water flow problems in one-dimension

HUANG Wen-zhu

(College of Resources and Environmental Sciences, China Agricultural University, Beijing 100193, China)

Abstract Richards equation is the most common model used to describe water flow in the vadose zone, which can yield solutions with sharp fronts in space and time under certain conditions. To effectively simulate unsaturated flow in porous media for convection-dominated problem, discontinuous Galerkin (DG) methods with penalty was proposed. The method was applied to simulate one-dimension unsaturated infiltration problem. Interior penalty discontinuous Galerkin (IPDG) method and standard finite elements method (FEM) were both used to solve the Richards equation with van Genuchten-Mualem model and Dirichlet conditions. Different soil numerical simulated results showed that DG method could effectively simulate the unsaturated water flow in the specific soils for convection-dominated problem on several nets. DG method solution could excellently approximate to the exact solution. The numerical experiments also demonstrated that DG method could achieve accurate global mass balance.

Key words soil water flow; convection-dominated; Richards equation; discontinuous Galerkin method

土壤具有复杂的成份组成, 不同土壤质地的含水量、土壤中水的能态和多种水流运动方式都会影响土壤的物理性质。自然界较为常见的非均质土壤通常表现出尺度多样和跨越幅度大的渗透性, 应用传统有限元方法或有限差分方法求解入渗较快的对流占优土壤水流问题时, 需要极其精细的剖分才能获得较为精确的解, 往往消耗巨大计算机内存和计

算时长^[1], 所以既可以减少剖分单元数又可以保证计算精度的数值算法在对流占优水流模拟中具有研究意义。

模拟非饱和土壤水流问题可转化为数值求解对流扩散偏微分方程, 通常采用标准有限元法和有限差分方法就可以获得较为满意的结果。而某些砂性土壤中的水流运动, 当对流项在物理过程中起

收稿日期: 2014-04-04

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(51039007)

作者简介: 黄文竹, 博士研究生, E-mail: hwenzhu@cau.edu.cn

主导作用,即对流的影响远大于扩散的影响时,有限元和有限差分计算中易出现数值弥散和(或)数值振荡。特征线法和间断有限元(Discontinuous Galerkin, DG)方法在求解对流占优情形下的对流扩散方程时应用较多。DG 方法是 1973 年 Reed 等^[2]在求解中子运输问题时提出的,后期多位学者证明了 DG 方法求解线性方程、非线性方程和方程组的稳定性和收敛性,并指出 DG 方法可以很好的适用于 h 和 p -自适应方法^[3-6]。相比于一般连续有限元方法, DG 方法的自由度增加,由于试探函数是完全间断的,在单元边界上没有共享的自由度,导致解空间的大小激增。例如:假定每个节点上有 7 个线性的四面体单元, DG 方法的解空间大小约为有限元(Finite elements method, FEM)方法的 28 倍。但 DG 方法具有局部质量守恒性和较小的数值扩散和振荡,易于处理复杂的边界和边值问题,对网格的正则性要求不高,不受连续性的限制,尤其是对双曲方程中的一阶微分算子可以进行很好地处理,对于矢量线性方程系统则可以更好地改进迭代性能,因此 DG 方法在工程学中得到广泛应用。

20 世纪 80 年代初期, Arnold^[7] 提出对称内部惩罚方法(Symmetric interior penalty Galerkin, SIPG),在全局元素法的基础上增加 1 个内部惩罚项,并应用该数值算法模拟二阶非线性抛物方程。随后出现非对称内部惩罚方法(Nonsymmetric interior penalty Galerkin, NIPG)以及不完整的内部惩罚方法(Incomplete interior penalty Galerkin, IIPG), DG 方法中跨越单元边界的非连续性受到内部惩罚项的抑制。Cockburn 等^[8-10] 提出 Runge-Kutta 间断有限元(Runge-Kutta discontinuous Galerkin, RKDG)方法求解守恒律方程,提出并推广局部间断有限元(Local discontinuous Galerkin, LDG)方法到一般的对流扩散问题。在处理周期性边界条件的线性对流占优扩散问题中,当间断基函数采用一次多项式时, LDG 方法具有二阶收敛^[11]。惩罚形式和数值通量形式的 2 种间断有限元方法在一定条件下是等价的^[12]。

目前尚未有学者将内部惩罚的间断有限元方法应用于解决多种土壤质地中对流占优的非饱和土壤水流的问题。本研究拟采用一种惩罚形式的间断有限元方法(Interior penalty discontinuous Galerkin, IPDG)用于解决数值模拟非饱和土壤水流问题,试

图在剖分单元较少的网格结点上有效地抓住砂性土壤中水流运动对流占优的特点,并通过求解反映土壤水流运动的 Richards 方程来检验该 DG 算法的有效性和精确性。

1 DG 方法的介绍

1.1 控制方程及本构关系

非饱和和介质中一维 Richards 方程(θ -方程)有如下简化形式:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \right) \quad (1)$$

式中: θ 为体积含水量; t 为时间; $K(\theta)$ 为非饱和导水率; $D(\theta)$ 为非饱和土壤水的扩散率,此变量是非饱和导水率 $K(\theta)$ 和比水容量 $C(\theta)$ 的比值; z 为空间坐标,坐标原点取向向下为正。

非饱和和水流运动的水力特征主要由水力传导度和水分特征曲线表示,根据 van Genuchten-Mualem 模型^[13], $K(\theta)$ 和 $D(\theta)$ 有如下表达式:

$$\begin{aligned} K(\theta) &= K_s \cdot S_e^{\frac{1}{2}} [1 - (1 - S_e^{\frac{1}{m}})^{m'}]^2 \\ D(\theta) &= \frac{(1 - m') K_s}{\alpha m' (\theta_s - \theta_r)} S_e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{m}} ((1 - S_e^{\frac{1}{m}})^{-m'} + \\ &\quad (1 - S_e^{\frac{1}{m}})^{m'} - 2) \\ S_e &= (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r) \end{aligned}$$

压力水头关于体积含水量的函数表达式为:

$$\psi = -\frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{-\frac{1}{m}} - 1 \right]^{\frac{1}{n}}$$

式中: θ_r 为残余体积含水量; θ_s 为饱和体积含水量; m' 和 n' 为水分特征曲线的形状参数; K_s 为饱和水力传导度; α 是与平均孔径尺度有关的多孔介质的参数。

考虑 Dirichlet (一类)边界条件,地表湿润条件下的土壤水分运动问题可表示为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \right) \\ \theta(z, 0) = \theta_0 \\ \theta(0, t) = \theta_a \\ \theta(l, t) = \theta_b \end{cases} \quad (2)$$

计算区域为 $[0, l]$, θ_0 为初始含水量分布, θ_a 和 θ_b 分别对应上下边界含水量值。

1.2 原理及算法

惩罚形式的 DG 方法利用内部惩罚项(Interior penalty)来抑制有限元函数在跨越单元交界面时的间断性,通过适当地选取正交基函数,使得方程组

的质量矩阵是分块对角的,每一块的阶数等同于单元的自由度。本研究基于 IPDG 方法对 Richards 方程进行空间离散,在剖分单元上使用间断的正交基函数代替普通连续的多项式基函数来求解方程。

式(2)在时间上采用向后 Euler 差分格式,空间上进行 IPDG 离散^[7,14],方程弱解格式为:求解 $\theta_k^h \in V_h$ 使得

$$0 = \sum_{E \in E_h} \left(\left(\frac{\theta_k^h - \theta_{k-1}^h}{\Delta t}, \varphi^h \right)_E + (D(\theta_k^h) \nabla \theta_k^h - K(\theta_k^h), \nabla \varphi^h)_E \right) - \sum_{e \in \Gamma} (\{D(\theta_k^h) \nabla \theta_k^h\}, [\varphi^h])_e + \sum_{e \in \Gamma} (\{-K(\theta_k^h)\}_{upw}, [\varphi^h])_e + \sum_{e \in \Gamma} s([\theta_k^h], [\varphi^h])_e \quad \forall \varphi^h \in V_h, \theta_0^h = \theta_0 \quad (3)$$

式中: V_h 为分片多项式空间, θ_k^h 是网格结点上的体积含水量,定义 $\{\varphi\} = 1/2(\varphi_1 + \varphi_2)$, $[\varphi] = \varphi_1 n_1 + \varphi_2 n_2$, 这里 $e \in \Gamma^0$, Γ^0 为内单元边界, φ_1 、 φ_2 和 n_1 、 n_2 分别为 φ 在结点两侧取值以及结点所在单元的单位外法向量; $\{\varphi\} = \varphi$, $[\varphi] = \varphi n$, 这里 $e \in \Gamma^d$, Γ^d 为求解区域的外边界, n 为求解区域边界处单元的单位外法向量; $s = C_e / |e|$, $C_e > 0$ 且与网格大小无关; $\{-K\}_{upw} = \{-K\} + \frac{n^+}{2}[-K]$, 其中 $K \cdot n^+ \geq 0$ 。

2 数值试验与讨论

2.1 数值算例

非线性的 Richards 方程一般情况下难以获得解析解的具体表达式,所以数值算例中的参考解是在剖分单元数 $N=1\ 024$ 时利用 DG 和连续有限元分别获得的数值解的均值,并以此参考解作为“精确解”。误差分析分别使用相对 L_2 模误差:

$$e_{er_2} = \left[\frac{\sum_{i=1}^N (\theta_i^h - \theta(z_i))^2}{\sum_{i=1}^N (\theta(z_i))^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

相对最大模误差:

$$e_{er_\infty} \left[\frac{\max_{i=1, \dots, N} |\theta_i^h - \theta(z_i)|}{\max_{i=1, \dots, N} |\theta(z_i)|} \right] \quad (5)$$

式中: N 表示网格上的结点总数, θ_i^h 表示在网格结点 z_i 处的体积含水量解, $\theta(z_i)$ 是精确解 θ 在粗结点 z_i 处的值。数值解的质量守恒计算如下^[15]:

$$MB(t^{k+1}) = \frac{\text{研究区域内增加的总质量}}{\text{进入研究区域的净通量}} \quad (6)$$

计算公式具体表达如下:

$$MB(t^{k+1}) = \left[\sum_{i=1}^N (\theta_i^{k+1} - \theta_i^k) \Delta z + (\theta_0^{k+1} - \theta_0^k) \frac{\Delta z}{2} + (\theta_N^{k+1} - \theta_N^k) \frac{\Delta z}{2} \right] \cdot \left(\sum_{j=1}^{k+1} (q_0^j - q_N^j) \Delta t \right)^{-1}$$

式中: θ_i^0 是网格结点 z_i 的初始体积含水量。

在数值算例中,研究区域分别是地下纵深 100 m 的均质砂土(Sand)剖面,50 m 的均质壤砂土(Loamy sand)剖面,10 m 的均质砂壤土(Sandy loam)剖面。模拟时间上限分别为 4、4 和 2 d,时间离散的固定步长为 $\Delta t = 1.0 \text{ E} - 4 \text{ d}$ 。初始剖面含水量值为残余含水量 θ_r ,上边界接近饱和含水量 θ_s ,下边界为 θ_r 。模拟区域上一致均匀网格剖分单元分别是 4、8、16 和 32 个。土壤水力学参数取自美国农业部土壤质地分类(USDA)^[16],其中砂土的饱和导水率达到 29.7 cm/d,壤砂土的饱和导水率为 14.59 cm/d,砂壤土的为 4.42 cm/d。

2.2 结果与讨论

图 1 给出了砂土、壤砂土和砂壤土 3 种质地的算例中剖分单元个数为 8 的网格上 2 种算法的模拟结果。相比 FEM, DG 方法在研究区域内模拟结果更接近精确解。

图 2 给出了 $t=2 \text{ d}$ 时砂土算例中不同网格上 DG 和 FEM 算法的相对 L_2 模误差和相对最大模误差, DG 方法的 2 种相对误差随着网格数增加呈递减收敛趋势。在壤砂土算例中网格数为 8 和 16 时 DG 的相对误差均高于相同模拟时长下 DG 在砂土算例的相对误差。

表 1 和表 2 给出了砂土算例中剖分单元数 $N=4、8、16$ 和 32 时 DG 和 FEM 算法在 $t=1、2、3$ 和 4 d 的 2 种相对误差值。算例中随着剖分单元数量的增加, DG 的相对 L_2 模误差和相对最大模误差在部分模拟时间段呈现单调减小趋于零的趋势。在整个模拟时间段中 DG 方法相对 L_2 模基本低于 5%, 相对最大模误差低于 10%。FEM 方法在砂土算例中相对 L_2 模误差超过 50%, 相对最大模误差最高达到 90% 以上。FEM 计算的相对误差均大于 DG 方法, 且对于砂土、壤砂土和砂壤土算例 FEM 未见明显收敛。

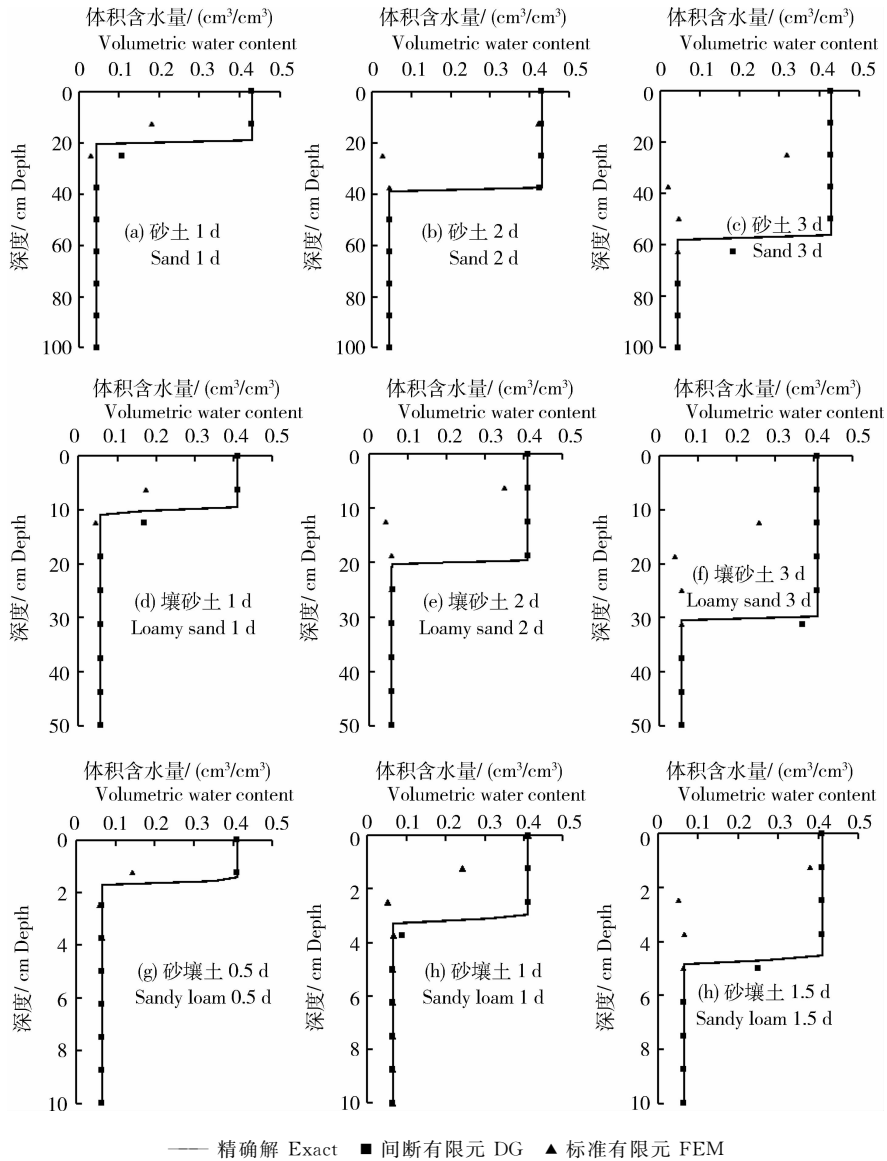


图 1 砂土、壤砂土和砂壤土算例中 DG 和 FEM 方法在网格数 $N=8$ 的模拟结果
 Fig. 1 Exact solution and solution of DG and FEM based on the grids with 8 on the case of sand, loamy sand and sandy loam example

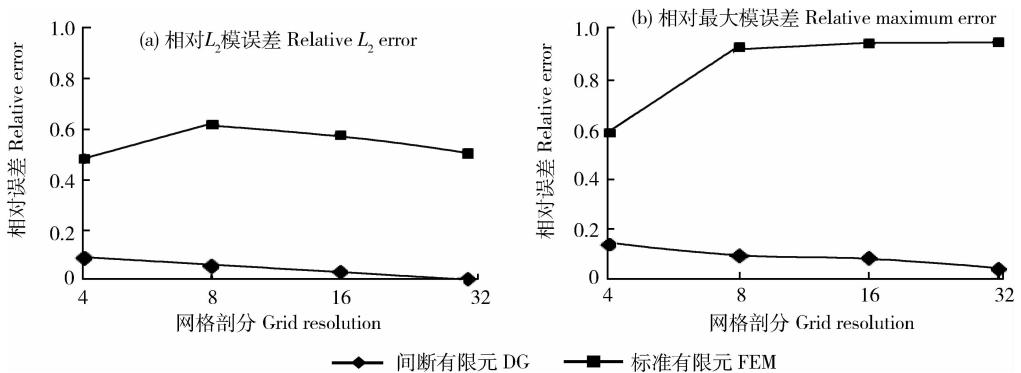


图 2 砂土算例中 DG 和 FEM 的相对 L_2 模误差和相对最大模误差

Fig. 2 Relative L_2 error and relative maximum error of DG and FEM solution for grids for sand example

表1 砂土算例中内部惩罚间断有限元方法和标准有限元方法的相对 L_2 模误差Table 1 Relative L_2 norms of the error of IPDG and FEM solution

砂土 Sand	时间/d Time	网格数 N			
		4	8	16	32
内部惩罚间断有限元 IPDG	1	0.054	0.183	0.044	0.024
	2	0.093	0.061	0.041	0.013
	3	0.074	0.031	0.043	0.010
	4	0.000	0.054	0.047	0.010
标准有限元方法 FEM	1	0.396	0.482	0.600	0.551
	2	0.485	0.620	0.581	0.508
	3	0.574	0.613	0.565	0.501
	4	0.073	0.611	0.554	0.499

表2 砂土算例中内部惩罚间断有限元方法和标准有限元方法相对最大模误差

Table 2 Relative maximum norms of the error of IPDG and FEM solution

砂土 Sand	时间/d Time	网格数 N			
		$N=4$	$N=8$	$N=16$	$N=32$
内部惩罚间断有限元 IPDG	1	0.065	0.280	0.074	0.062
	2	0.140	0.095	0.087	0.042
	3	0.128	0.071	0.126	0.031
	4	0.000	0.128	0.161	0.045
标准有限元方法 FEM	1	0.498	0.577	0.891	1.000
	2	0.589	0.932	0.947	0.951
	3	0.912	0.952	0.951	0.990
	4	0.117	0.941	0.942	0.962

图3给出网格数 $N=4, 8, 16$ 和 32 时砂土、壤砂土和砂壤土算例中 $t=1, 2, 3$ 和 4 d 时 DG 和 FEM 2 种方法在计算区域上整个模拟时间段内质量守恒的计算误差。当网格数 $N \geq 8$ 时 DG 方法的质量守恒误差小于 2% , 表明在 Dirichlet 边界条件下在整个模拟区域和计算时间段内 DG 方法满足全局质量守恒定律。DG 方法在砂土算例中粗化的网格上给予比其他壤砂土和砂壤土算例稍好的精度, 原因可能是由于砂土算例中的对流占优最为明显, 此时 Richards 方程呈现出双曲方程的特性, 而 DG 方法可以更好地处理此类问题。

将 FEM 和 DG 应用到粉黏土 (Silty clay) 和粉粘壤土 (Silty clay loam) 具有 van Genuchten-Mualem 模型和 Dirichlet 入渗边界条件的非饱和土

壤水流算例中, 结果表明: 当网格单元数 $N=4, 8$ 和 32 在多数模拟时间段内, FEM 获得的数值解的相对 L_2 模误差和相对最大模误差均低于 DG 方法的模拟误差值。

3 结论

本研究应用惩罚形式的 DG 方法求解多孔介质中的非饱和水流问题, 利用不同土壤质地、多种网格剖分、van Genuchten-Mualem 水力参数模型和 Dirichlet 边界条件的非饱和算例来检验算法。分析和讨论数值结果获得如下结论: 1) 基于 DG 方法的内部惩罚间断有限元方法, 通过引入内部惩罚项来抑制跨越单元边界的不连续性, 在独立的单元上仅利用和处理相邻单元的信息, 就能够在较粗的网格

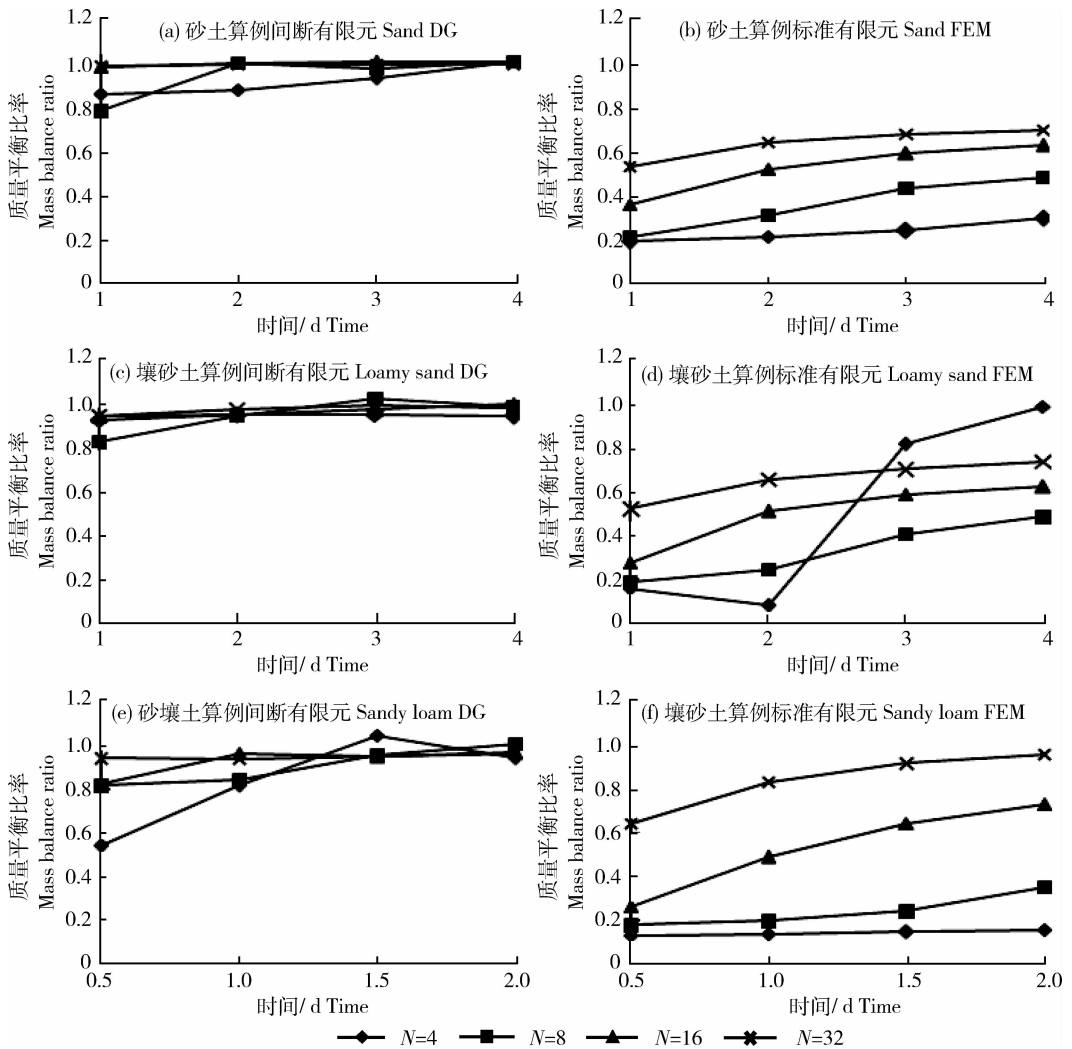


图 3 DG 和 FEM 方法在砂土、壤砂土和砂壤土算例中的质量守恒误差

Fig. 3 Mass balance results of DG and FEM on the case of sand, loamy sand and sandy loam example

上有效的捕获 Richards 方程对流项的快速变化。
 2)对于砂土和壤砂土算例,DG 能够满足全局质量守恒性。3)对流占优较为明显的算例中 DG 方法模拟精度高于标准有限元方法,当算例中扩散项影响较为明显时内部惩罚 DG 方法不能有效地进行模拟。由于本研究采用的空间离散方法使得计算过程中时间步长受限,不利于长时间模拟,目前还仅限于几种特定的均质土壤中的一维非饱和水流的模拟,未来的研究工作将针对非均质非饱和水流问题展开。

致谢 感谢苏州大学的岳兴业教授提供的有关间断有限元方法的新进展及其理论的讨论;感谢指导教师任理教授的指教,感谢匿名审稿人的修改意见和建议。

参 考 文 献

- [1] 薛禹群,谢春红. 地下水数值模拟[M]. 北京: 科学出版社, 2007
- [2] Reed W H, Hill T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation [R]. Los Alamos Scientific Laboratory, Technical Report LA-UR-73-479, 1973
- [3] Chen Z, Yue X. Numerical homogenization of well singularities in the flow transport through heterogeneous porous media[J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2003, 1(2): 260-303
- [4] Falk R S, Richter G R. Explicit finite element methods for symmetric hyperbolic equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1999, 36(3): 935-952
- [5] Delves L M, Hall C A. An implicit matching principle for global element calculations[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1979, 23(2): 223-234
- [6] Lesaint P, Raviart P. On a finite element method for solving the neutron transport equation[M]. Paris: Univ Paris VI, Labo

- Analyse Numérique,1974
- [7] Arnold D N. An interior penalty finite element method with discontinuous elements [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,1982,19(4):742-760
- [8] Cockburn B. Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems [J]. Lecture Notes in Computational Science and Engineering,1999,9:69-224
- [9] Cockburn B, Shu C W. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,1998,35(6):2440-2463
- [10] Cockburn B, Shu C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: General framework[J]. Mathematics of Computation, 1989,52(186):411-435
- [11] 王阿霞,马逸尘. 对流占优的扩散问题的局部间断 Galerkin 方法[J]. 西安交通大学学报,2008,42(2):234-237
- [12] 张铁. 间断有限元理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2012
- [13] Van Genuchten. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils [J]. Soil Science Society of America Journal,1980,44(5):892-898
- [14] Douglas J, Dupont T. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods[J]. Computing Methods in Applied Sciences,1976,58:207-216
- [15] Celia M A, Bouloutas E T, Zarba R L. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation[J]. Water Resources Research,1990,26(7):1483-1496
- [16] Soil Survey Division Staff. Soil Survey Manual [M]. Washington:United States Department of Agriculture,1993

责任编辑:袁文业