

果汁等温结晶过程冰晶生长的相场法模拟

陈梅英¹ 冯力² 欧忠辉³ 陈锦权^{4*} 卓艳云⁴

(1. 福建农林大学 管理学院 旅游学院,福州 350002; 2. 兰州理工大学 材料科学与工程学院,兰州 730050;
3. 福建师范大学 数学与计算机科学学院,福州 350108; 4. 福建农林大学 食品科学学院,福州 350002)

摘要 针对冷冻浓缩过程冰晶夹带造成果汁可溶性固形物损失而限制其推广使用的问题,采用国内外描述相变微观结构的相场模型,将果汁体系视为水和溶质二元系统,从微观上模拟冰晶生长的演变过程。探讨扰动对晶体二次分枝生长的影响,修正各向异性的模数,并通过改变各向异性强度系数,获得冰晶模拟的各向异性强度系数合适取值,进一步分析结晶模拟时间对模拟结果的影响,与试验结果进行验证。结果表明:扰动通过诱发侧向分枝的生长,从而影响晶体形貌;各向异性会影响冰晶生长形貌,各向异性强度系数太小,分枝不明显,太大,会造成冰晶非对称生长;模拟结果与试验结果两者吻合较好。

关键词 果汁; 相场法; 等温结晶; 冰晶生长

中图分类号 TS 275.5

文章编号 1007-4333(2013)06-0192-06

文献标志码 A

Phase-field modeling of isothermal crystallization process in juice crystal growth

CHEN Mei-ying¹, FENG Li², OU Zhong-hui³, CHEN Jin-quan^{4*}, ZHUO Yan-yun⁴

(1. Management College & Tourism college, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002, China;
2. College of Materials Science and Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;
3. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350108, China;
4. College of Food Science, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002, China)

Abstract In order to simulate the evolution of ice crystal growth from the microscopic, regarding juice as water and solute in binary system, the phase-field model theory which had been widely used in the Phase transition of the microscopic structure at home and abroad was used to stimulate the ice growth. The influence of disturbance on crystal growth of lateral branch was discussed. By modifying anisotropic modulus and changing the anisotropic strength parameters, the suitable scope of the anisotropic strength parameters were to obtain to further study the effect of different crystallized time on the evolution of ice crystal growth. Results showed that the disturbance would influence the results of the growth of lateral branch, the growth of lateral branch wouldn't appear without disturbance; when the crystal anisotropic modulus valued 6, a hexagonal crystal structure could be simulated; the value of the Anisotropic strength parameter range was about 0.02 to get right simulation results of ice crystal growth evolution, too small or too big value would get unsatisfactory growth results. It validated the simulation results coincided well with experiment.

Key words juice; phase-field; isothermal crystallization; crystal growth

目前,工业化应用的浓缩方法主要是真空蒸发浓缩。该工艺设备复杂,不仅能耗大,还易造成热敏

性成分变性、挥发性成分损失,并失去原有风味和破坏营养成分。冷冻浓缩具有可在低温下操作,气液

收稿日期: 2013-04-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(31101327); 高等学校博士学科点专项科研基金博导类资助课题(20123515110016); 福建省自然科学基金项目(2011J01002); 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目

第一作者: 陈梅英,副教授,博士,主要从事食品工程与食品安全研究, E-mail: cmy2816@126.com

通讯作者: 陈锦权,教授,博士生导师,主要从事食品工程研究, E-mail: chenjq6613@163.com

界面小,微生物增殖、溶质的劣化及挥发性芳香成分的损失可控制在极低的水平等优点。该技术在果汁、葡萄酒、咖啡提取物、牛奶等的浓缩及海水淡化、中药提取液浓缩,废水处理等方面应用已有研究。另外,同蒸发浓缩过程相比,冷冻浓缩过程能耗少,比真空蒸发浓缩节能40%以上,设备寿命期内可减少CO₂排放量53.5 t,整体的冰结晶又是很好的蓄冷、降温用冷源,对于保护环境、促进资源的再利用都是很有意义的^[1-2]。冷冻浓缩这一低能耗、可生产高质量产品的加工技术具有很大的发展潜力,但由于冰晶夹带且难以分离,造成果汁可溶性固形物的大量损失,限制了其推广使用。解决冰晶夹带、降低损失是推进冷冻浓缩工业化的关键,其突破口是控制冰晶生长行为。目前对冰晶生长的认识很大程度上仍以试验为基础,通过冰晶成核和生长过程的观测,了解降温速率、溶液浓度、结晶时间等因素对冰晶夹带的影响^[3-5]和在非平衡热力学条件下的动力学规律^[6-7]。何立群等把异相成核后呈现分形生长的冰晶形态结构及其演变过程作为研究对象,用分形理论框架的理论分析水分子结晶能力与降温速率、溶液浓度的关系^[8]。但这些研究都没有构建冰晶生长特征的数学物理模型^[9-10]。

结晶是固体物质以晶体状态从蒸汽、溶液或熔融物中析出的过程,冷冻浓缩的结晶是溶剂以晶体状态从溶液中析出的过程。生成的冰晶是一种典型的凝固组织,也是非平衡组织结构,涉及到热量、质量和动量传输以及界面动力学和毛细作用效应相耦合的自由边界问题,是相变和多物理场相互作用的复杂过程。

相场法是一种用于描述在非平衡状态中复杂相界面演变强有力的工具。相场法建立在统计物理学基础上,以金兹堡-朗道(Ginzburg-Landau)相变理论为基础,该理论通过微分方程反映扩散、有序化势与热力学驱动力的综合作用。引入相场变量作为序参量来区分过冷熔体中的固相和液相,通常称相场变量 $\phi(r,t)$ 为相场。在相场中 $\phi(r,t)$ 的值表征了某时刻系统中各点的物理状态: $\phi(r,t)=1$ 时表示固相, $\phi(r,t)=-1$ 或0时表示液相,在固-液界面上 $\phi(r,t)$ 的值在0~1或-1~1之间连续变化,将相场变量 $\phi(r,t)$ 在-1~1或0~1范围的扩散层定义为界面,从而避免了跟踪复杂固液界面的困难。相场方程的解可描述系统中固液界面的形态曲率和界面的移动,目前该方法已成为微观组织模拟中的研

究热点,属于材料科学的前沿研究领域^[11-13]。国内外学者将相场法通过相场与温度场、溶质场、流场及其他外部场的耦合,模拟金属凝固过程固相和液相中的溶质偏析、枝晶分枝的形成、熟化和重熔等复杂的现象,并定量地研究固液界面曲率效应、动力学效应、扰动、噪声、各向异性等对凝固微观组织形成的影响^[14-26]。把相场法用于模拟冷冻浓缩冰晶生长的过程,尚处在初步探索阶段^[27-28]。

本研究基于Kim等提出的KKS相场模型^[11],采用相场和溶质场耦合的方法,对冷冻浓缩等温结晶过程进行模拟,分析扰动对模拟结果的影响,以及各向异性强度系数的取值范围,并模拟结晶时间对冰晶形貌的影响。以期分析冷冻浓缩冰晶夹带率的理论因素,为改进果汁冷冻浓缩工艺,进一步研究各种因素对冰晶生长影响规律提供基础理论和技术支持。

为了简化模型,将果汁的多元成分视为水和溶质二元结构,并忽略了结晶潜热的释放,将果汁的结晶过程近似地认为是在等温度条件下进行。

1 果汁冷冻浓缩过程冰晶生长相场模型的建立

1.1 相场控制方程

应用稀溶液近似时的基础方程,借鉴金属领域二元物质,采用kim等提出的KKS相场模型^[11],建立模拟果汁冷冻浓缩过程冰晶生长的相场模型。利用自由能密度的形式的相场法导出相场方程和溶质场方程。自由能密度定义为固相和液相的自由能密度分别乘以固相和液相的分数,再加上剩余自由能的和,表示为

$$f(c, \phi) = h(\phi)f^S(c_S) + (1-h(\phi))f^L(c_L) + Wg(\phi) \quad (1)$$

式中: f 为自由能密度, f^S 为固相的自由能密度, f^L 为液相的自由能密度,且其固相分数为 $h(\phi) = \phi^3(6\phi^2 - 15\phi + 10)$,液相分数为 $(1-h(\phi))$; c 为溶质的摩尔分数, ϕ 为相场变量, $\phi=1$ 时表示固相, $\phi=-1$ 或0时表示液相,在固-液界面上 ϕ 的值在0~1或-1~1之间连续变化; $Wg(\phi)$ 为剩余自由能,其中 W 为相场参数, $g(\phi)$ 为剩余自由能函数, $g(\phi) = \phi^2(1-\phi)^2$ 。则相场方程可表示为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = M(\epsilon^2 \nabla^2 \phi - f_\phi) \quad (2)$$

式中: M 为相场迁移率参数; ϵ 为与界面能有关的相场参数; $f(\phi)$ 是自由能密度对相场 ϕ 的一阶导数。

当利用稀溶液近似时,其表达式为

$$f(\phi) = \frac{RT}{V_m} h'(\phi) \ln \frac{(1-c_S^e)(1-c_L)}{(1-c_L^e)(1-c_S)} + W'_g(\phi) \quad (3)$$

式中: R 为气体常数; T 为温度; V_m 为摩尔体积; c^e 为平衡浓度; 上、下标 S 和 L 分别表示固相和液相; $h'(\phi)$ 为 $h(\phi)$ 的导函数, $h'(\phi) = 30\phi^2(1-\phi)^2$; $g'(\phi)$ 为 $g(\phi)$ 的导函数, $g'(\phi) = 2\phi(1-\phi)(1-2\phi)$ 。

本课题前期对冷冻浓缩冰晶生长相场法的研究是假设果汁溶液为单物质,在各向同性前提下的冷冻浓缩^[27-28],但一般而言,果汁溶液是多元成分,且冰晶的物理性质是各向异性的,前期假设与实际情况差距很大。故本文视果汁为水和溶质二元结构,通过与界面能有关的参数 ϵ ,引入各向异性,其表达式为

$$\epsilon(\theta) = \epsilon_0(1 + \nu \cos(k\theta)) \quad (4)$$

式中: k 为各向异性的模数(各向异性方向的个数),表示 k 次对称性; ν 为各向异性的强度系数(表示各向异性强度的大小); θ 为界面与优先生长方向的夹角,表示为

$$\tan\theta = \phi_y / \phi_x \quad (5)$$

对式(2)引入各向异性,将其离散求解。

1.2 溶质场扩散方程

同样利用自由能密度的形式,把溶质场扩散方程改写成下面的形式:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{D(\phi)}{f_c} \nabla f_c \right) + \frac{D(\phi)}{f_c} \nabla \cdot \nabla f \quad (6)$$

式中: $D(\phi)$ 为溶质扩散率; f_c 为自由能对浓度的一阶导数, f_{cc} 为自由能对浓度二阶导数。在界面区域的溶质浓度 c 是固相和液相的摩尔分数的和,并且在两相平衡时,界面区域中任意点的固相和液相的化学势相等,即

$$c = h(\phi)c_S + (1-h(\phi))c_L \quad (7)$$

$$\mu^S(c_S(x,t)) = \mu^L(c_L(x,t)) \quad (8)$$

式中 μ^S 和 μ^L 分别为固相和液相的化学势。

2 相场参数的确定及模拟计算

2.1 参数的确定

相场迁移率参数 M 的表达式为

$$M^{-1} = \frac{\epsilon^2}{\sigma} \frac{RT}{V_m} \frac{1-k^e}{\mu^k m^e} \quad (9)$$

式中: σ 为界面能; R 为气体常数; T 为温度; V_m 为

摩尔体积; k^e 为平衡常数; μ^k 为动力系数; m^e 为液相线斜率。

$$\epsilon = \sqrt{\frac{6\lambda}{2 \cdot 2} \sigma} \quad (10)$$

$$W = \frac{6 \cdot 6\sigma}{\lambda} \quad (11)$$

式中 λ 为界面厚度。

2.2 数值计算

1) 边界条件和初始条件。在计算区域边界,相场和溶质场边界条件都采用绝热边界条件,即 Zero-Neumann 边界条件。假设初始晶核半径为 r ,则

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq r^2, \phi = 1, T = T_m - \Delta T \\ x^2 + y^2 > r^2, \phi = 0, T = T_m - \Delta T \end{cases} \quad (12)$$

式中: x 和 y 分别为模拟横坐标和纵坐标; T 为有量纲温度, T_m 为模拟的初始温度, ΔT 为过冷度。

2) 数值计算方法。计算的时间步长 Δt 受溶质场计算的限制,即 $\Delta t < (\Delta x)^2 / 4D_L$, D_L 为液相中的溶质扩散系数,取 $\Delta t = 1.5 \times (10^{-9})$ s。晶体轴生长主轴对应于直角坐标系的 x 轴和 y 轴,相场和溶质场的计算网格数为 800×800 ,网格的尺寸为 1×10^{-8} m,初始晶核设为半径 $r = 10$ 个网格数的球。相场方程采用显示有限差分求解。求解溶质场方程时,若对(7)式进行硬性差分求解方程,其工作量大且易出错,故先计算式(7)括号内的溶质通量,然后利用其和求出单元内的浓度变化。

2.3 加入扰动

为了模拟实际结晶过程中界面处的波动,计算时加入随机的扰动,在相场方程中加入人为的随机扰动:

$$f\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + 16g(\phi)\chi\bar{\omega} \quad (13)$$

式中: χ 为 $-1 \sim 1$ 之间的随机数; $\bar{\omega}$ 为与时间有关的相扰动强度因子。16 $g(\phi)$ 用来强制扰动在固液界面中出现, $\phi = 0.5$ 处可能出现最大扰动,远离界面迅速减小。

3 模拟结果与分析

3.1 扰动对晶体生长的影响

式(13)为随机的扰动模型。为探讨引入随机扰动必要性,分别在未加入随机扰动和加入随机扰动情况,模拟晶体的生长形貌。由于枝晶是对称的,为节省计算时间,只计算晶体生长的 1/4 区域。模拟时间 $t = \Delta t \times N$,其中, N 为运行迭代次数, $N = 48 \times$

1 000。图 1(a)示出模拟时间 $t=0.48$ ms 时晶体的生长形貌。图 1(b)为 $t=0.72$ ms,未引入随机扰动的晶体生长形貌。图 1(c)为 $t=0.72$ ms,引入随机扰动的晶体生长形貌。从图 1 可以看出,随着结晶模拟时间的增加,晶体形貌变大,但是,如果没有扰动(图 1(b)),晶体生长主要是沿着直角坐标系的 x 轴和 y 轴主干方向,2 次分枝没有长出,始终在两夹角中间。在计算时加入随机扰动 $-1 < \chi < 1$ 的随

机数,及与时间有关的相扰动强度因子的 $\bar{\omega} = 0.008$,则随着结晶模拟时间的增加,晶体形貌不但变大,而且 2 次分枝明显(图 1(c)),并出现 2 次分枝间的互相竞争生长及根部的颈缩现象,2 次分枝上又继续长出 3 次分枝,且分枝从主枝上垂直生长,反映了晶体生长的演变过程。2 次分枝是晶体生长到一定程度重要特征之一,方程中没有加入扰动,无法反映这表征,要使模拟结果更好地反映晶体生

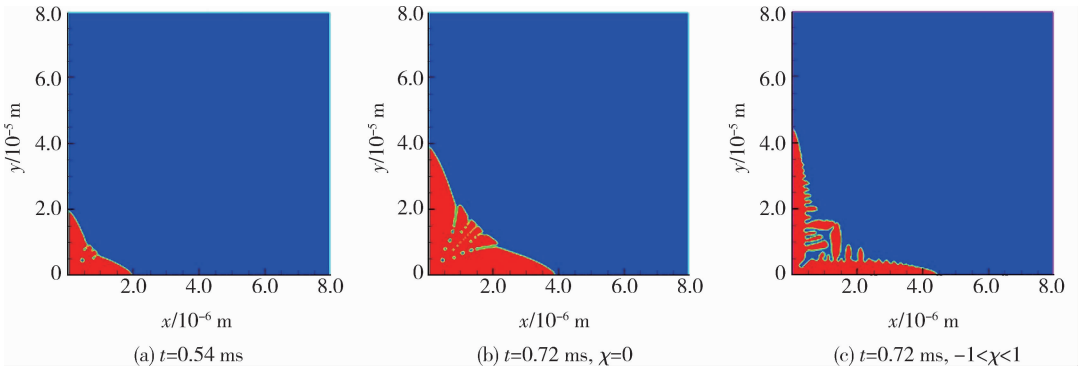


图 1 随机扰动对晶体形貌的影响

Fig. 1 Evolvement of crystal pattern with random Fluctuation

长的演变规律,应在方程中加入随机扰动。

3.2 各向异性对冰晶形貌的影响

研究表明^[15-16],金属晶体一般为体心立方或面心立方结构,各向异性模数 $k=4$,其各向异性强度系数 $\nu < 0.07$,该参数的取值对模拟的晶体形貌特征影响很大。冰晶的结构一般为密排六方结构,本研究为模拟冰晶结构,故取各向异性模数 $k=6$ 。在其他参数取值不变的条件下,改变各向异性强度系数 ν ,观察各向异性强度对冰晶形貌的影响。从而确定各向异性强度系数 ν 的取值范围。

各向异性强度系数 ν 的取值对冰晶形貌的影响很大(图 2)。当 $\nu=0.010$ 和 $\nu=0.015$ 时,冰晶形貌都是对称的正六边形结构,但 6 条边上没有凸起,即没有长出 2 次分枝。当 $\nu=0.020$ 时,冰晶整体上呈对称的正六边形结构,且有 2 次分枝,接近实际冰晶的形貌特征。随着 ν 取值的继续增大,横向生长的趋势超过了纵向,当 $\nu=0.025$,其横向生长速度大大超过纵向生长速度,冰晶形貌开始失真,偏离冰晶的真实形貌。故模拟冰晶生长,本研究取各向异性强度系数 $\nu=0.020$ 。

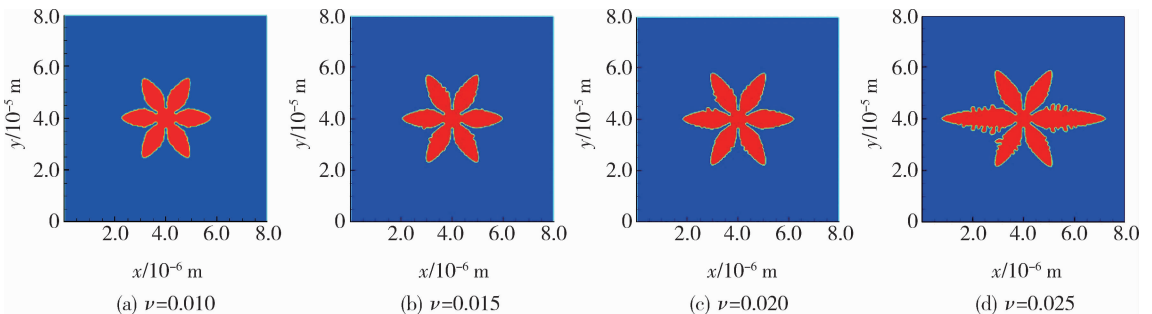


图 2 各向异性强度系数 ν 对冰晶形貌的影响

Fig. 2 Influence of anisotropy degree on ice crystal growth

3.3 模拟结晶时间变化对晶体形貌的影响

本研究将果汁体系视为水和溶质二元系统,选用9.6%的糖水溶液作为研究对象,在过冷度 ΔT 为20 K时,取各向异性模数 $k=6$,各向异性强度系数 $\nu=0.020$,其他参数取值不变,改变模拟结晶时间,模拟结果见图3。可以看出,随着结晶模拟时间的延长,冰晶不断长大,形貌也发生明显变化。当模拟时间 $t=0.30$ ms时,冰晶是个边缘光滑的正六边形(图3(a))。随后,当模拟时间 $t=0.54$ ms时冰晶形状变大,6个边的中间位置开始出现凹陷,6个顶点处开始突出,但整个边缘较为光滑(图3(b))。继

续延长结晶时间,当模拟时间 $t=0.75$ ms时,冰晶的形貌明显变大,6个分枝向外延伸,同时延伸的边缘较为粗糙(图3(c))。当结晶时间 $t=0.90$ ms时,冰晶体形貌继续变大,分枝沿着6个轴方向继续延伸,而且6个分枝上都长出明显的2次分枝(图3(d))。从以上的冰晶形貌演化规律可以看出,随着模拟结晶时间的继续延长,冰晶形貌将不断变化,可呈现分枝乃至多次分枝。枝状冰晶造成冷冻浓缩过程果汁的可溶性固形物的夹带率增加,果汁损失率加大。要减少果汁损失率,在实际操作过程应把结晶时间控制在合理的范围。

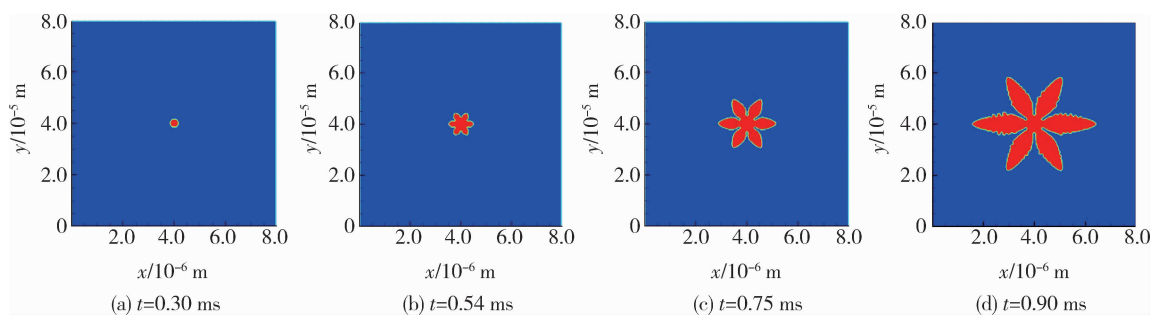


图3 结晶时间对冰晶形貌的影响

Fig. 3 Evolvement of ice crystal pattern at different crystallized time

图4为何立群等^[8]在低温显微镜下,观察10%蔗糖溶液在降温到冰晶的成核与生长过程的主要形态特征。从整个试验结果看,冰晶开始时呈圆形,当

生长到一定半径时,演变成六边形,又从六边形的6个顶点向外延伸生长,凸出部分略呈树枝状。这一试验过程冰晶形态特征的变化与图3模拟得到的冰

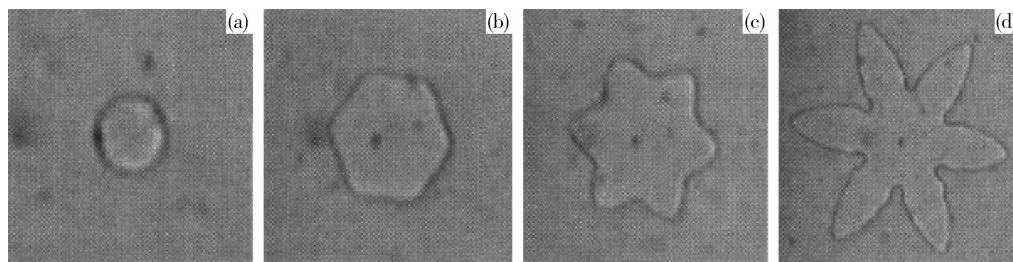


图4 低温显微镜下冰晶生长观察图

Fig. 4 Ice crystal pattern observed by low temperature microscope

晶形貌演化特征符合得较好。

4 结论

1) 探讨扰动对相场法模拟晶体结构的影响。加入扰动,晶体随着模拟时间的延长,不仅沿着主干方向生长,且出现2次分枝间的互相竞争生长及根部的颈缩现象。

2) 获得合理的冰晶模拟各向异性参数取值。相场法是材料领域的微观结构模拟的研究热点,为了获得适用模拟冰晶生长的相场模型,根据冰晶的密排六方结构与金属体心立方或面心立方结构的不同结构特点,修正了各向异性模数,取各向异性模数 $k=6$ 。并在不同各向异性强度系数取值下,模拟了冰晶形貌图,获得适合冰晶六边形结构的各向异性强

度系数的取值应在 0.020 左右。

3) 改变结晶时间, 晶体形貌随之改变。将合理修正参数后的相场法, 用于模拟冰晶生长过程, 从初始的正六边形的光滑结构变为 6 个分枝的结构, 并且分枝上出现明显的突起, 最终长成 2 次分枝乃至可能出现 3 次分枝。模拟获得的冰晶形貌演变规律, 与低温显微镜下的冰晶形态变化特征较符合。

4) 本研究在模拟果汁冷冻浓缩冰晶结晶时, 忽略潜热释放, 进行等温模拟, 并且视果汁为水和溶质二元成分的模拟。今后需进一步考虑潜热释放的影响, 耦合温度场, 进行非等温模拟, 并考虑果汁的多元结构, 进行多元结构模拟。由于有些果汁物性参数不易获取, 从而参考已有研究方法^[15-16], 部分物性参数采用 Al-Cu 合金的取值, 这可能造成模拟结果与实际情况有些误差, 进一步研究将求证果汁的物性参数, 必要时进行试验获取。

参 考 文 献

- [1] 文玲, 张旭, 杨德润. 冷冻浓缩污水处理的能耗模型建立及分析[J]. 建筑节能, 2012(10): 63-67
- [2] 冯毅, 汤乐, 张雷, 等. 液态生物制品低温浓缩工艺综合节能降耗分析[J]. 低温工程, 2008(6): 51-54
- [3] 肖旭霖, 李慧. 苹果汁冷冻浓缩工艺的研究[J]. 农业工程学报, 2006, 22(1): 192-194
- [4] 方婷, 陈锦权, 唐凌, 等. 橙汁冷冻浓缩动力学模型的研究[J]. 农业工程学报, 2008, 24(12): 243-248
- [5] Levent B. Mathematical analysis of freeze concentration of apple Juice[J]. Journal of Food Engineering, 1993(19): 95-107
- [6] Petzold G, Aguilera J M. Ice morphology: Fundamentals and technological applications in foods[J]. Food Biophysics, 2009, 4(4): 378-396
- [7] 余德洋, 刘宝林, 王伯春. 超声波对蔗糖溶液中树枝冰晶生长速度的影响[J]. 食品与发酵业, 2011, 37(8): 92-94
- [8] 何立群, 张永锋, 罗大为, 等. 生命材料低温保护剂溶液二维降温结晶过程中的分形特征[J]. 自然科学进展, 2002, 12(11): 1167-1171
- [9] 王海燕. PVA 与研究可视化 DSC 用于玻璃化冻存技术的实验[D]. 广州: 中山大学, 2009
- [10] 吕福扣, 刘宝林, 李维杰. HA 纳米微粒对 PEG-600 低温保护剂反玻璃化结晶的影响[J]. 低温物理学报, 2012, 34(4): 315-320
- [11] Kim S G, Kim W T, Suzuki T. Phase-field model for binary alloys[J]. Phys Rev E, 1999, 60(6): 71-86
- [12] Mullis A M. Quantification of mesh induced anisotropy effects in the phase-field method [J]. Computational Materials Science, 2006, 36(3): 345-353
- [13] 于艳梅. 过冷熔体中枝晶生长的相场法数值模拟[D]. 西安: 西北工业大学, 2002
- [14] 李方方, 刘静, 乐凯, 等. 细胞尺度冰晶生长行为的相场数值模拟[J]. 低温物理学报, 2008, 30(2): 172-175
- [15] 龙文元, 蔡启舟, 陈立亮, 等. 二元合金等温凝固过程的相场模型[J]. 物理学报, 2005, 54(1): 256-262
- [16] 冯力, 王智平, 路阳, 等. 二元合金多晶粒的枝晶生长的等温相场模型[J]. 物理学报, 2008, 57(2): 1084-1090
- [17] 石玉峰, 许庆彦, 柳百成. 不同择优生长取向角枝晶生长的数值模拟[J]. 中国有色金属学报, 2012, 22(12): 3468-3476
- [18] 刘明治, 张瑞杰, 方伟, 等. 相场法模拟两相多孔组织烧结[J]. 金属学报, 2012, 48(10): 1207-1215
- [19] 袁训锋, 丁雨田. 强制对流作用下纯 Ni 枝晶生长的相场法研究(二)[J]. 铸造技术, 2012, 33(8): 913-918
- [20] 王永彪, 王永欣, 陈铮. 相场法模拟凝固过程中界面效应对晶粒形核的影响[J]. 稀有金属材料与工程, 2012, 41(6): 1045-1049
- [21] 郭耀麟, 王锦程, 王志军, 等. 噪声对均质形核过程影响的晶体相场法研究[J]. 物理学报, 2012, 61(24): 1-7
- [22] 卢艳丽, 陈铮, 王永欣, 等. 相场法研究弹性畸变能对 Ni-Al 合金有序化过程的影响[J]. 稀有金属材料与工程, 2012, 41(7): 1216-1220
- [23] 王智平, 肖荣振, 徐建林, 等. 二元合金非等温凝固枝晶生长的数值模拟[J]. 兰州理工大学学报, 2006, 32(1): 16-18
- [24] Ding H, Spelt P D M, Shu C. Diffuse interface model for incompressible two-phase flows with large density ratios[J]. Computational Physic, 2007, 226(2): 2078-2095
- [25] 周力. 合金枝晶生长相场法模拟的关键技术研究[D]. 太原: 中北大学, 2002
- [26] 赵代平, 荆涛, 柳百成. 相场方法模拟铝合金三维枝晶生长[J]. 物理学报, 2003, 52(7): 1737-1742
- [27] 陈梅英, 陈锦权, 陈永雪. 荔枝汁冷冻浓缩冰晶生长的动力学分析和相场模拟[J]. 中国农业大学学报, 2011, 16(2): 153-157
- [28] 陈梅英, 陈永雪, 王文成, 等. 冷冻浓缩过程冰晶生长的相场法模拟[J]. 福建农林大学学报: 自然科学版, 2010, 39(5): 548-551

责任编辑: 刘迎春