

径向基函数在无单元方法中的应用

秦伶俐 黄文彬 周 巍

(中国农业大学 理学院,北京 100083)

摘 要 采用基于径向基函数的无单元法求解微分方程,探讨 2 种径向基函数的性质,得到了基函数中自由参数与求解精度的关系曲线,以及节点均布时自由参数最佳取值的计算公式及其数值;将节点均布下得到的自由参数取值公式应用于节点任意排列的情况,其求解精度仍能得到保证;比较了无单元方法在节点均布与否 2 种情况下的计算精度,其求解结果变化不大,均满足精度要求,说明这种无单元法对节点位置不敏感。

关键词 径向基函数;无单元法;形函数;条件;有限元法

中图分类号 O 241

文章编号 1007-4333(2004)06-0080-05

文献标识码 A

Application of radial basis function in meshless method

Qin Lingli, Huang Wenbin, Zhou Zhe

(College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract The meshless method based on radial basis functions was adopted to solve the differential equations. The properties of the two radial basis functions were investigated and the relational curves of the solution precision and the free parameters in the radial basis functions were obtained. The formula for the optimum value of the free parameter and its calculated value when the nodes were uniformly distributed were also obtained from the solution. We applied that formula to the condition of random nodes and found its solution could still keep a satisfied precision. We compared the computation precisions of the solutions under the conditions of various nodes distributions and the results showed that the precisions didn't change obviously, which meant that this method wasn't sensitive to the distribution of nodes.

Key words radial basis function; meshless method; shape function, property; FEM

随着计算机的发展,有限单元法成为模拟和求解复杂问题有效的数值方法,该方法以单元和分片插值为基础,可以保证计算结果的收敛性,且已有大量的通用软件和网格自动生成器可供使用;但在分析涉及特大变形、奇异性或裂纹动态扩展等问题时,由于网格发生畸变,增加了计算方面的困难。20 世纪 80 年代出现的无单元法,只需节点的信息,运用灵活,引起了众多学者的关注,随之产生出了多种无单元方法^[1,2]。

在众多的无单元法中,按是否构造形函数可以分为两大类:一类是构造形函数,典型的方法有,移动最小二乘近似法^[3,4](moving least square approximation method, MLS)、自然单元法^[5,6](the natural

element method, NEM)、点插值法^[7](point interpolation method, PIM),其中,移动最小二乘近似法构造出的形函数不满足条件,自然单元法和点插值法构造出的形函数满足条件;另一类是基于径向基函数的无单元法(radial basis functions meshless method, RBF),是近期发展起来的一种数值计算方法,此方法以径向基函数来逼近场函数,不构造形函数,只需节点信息,不需划分单元。相对于其他无单元方法,实现了真正意义上的无网格,且编程简单,计算量小,计算精度高。文献[8]~[12]中采用强形式直接在离散点处满足微分方程和边界条件,体现出了真正的无网格性;文献[13]~[16]中所用的方法采用弱形式来满足微分方程和边界条件。笔者对

收稿日期:2004-07-12

作者简介:秦伶俐,博士研究生;黄文彬,教授,博士生导师;周巍,副教授,通讯作者,主要从事固体力学研究, E-mail: fem@cau.edu.cn

径向基函数在无单元法中的使用原理进行了阐述, 通过求解微分方程探讨了不同的径向基函数中自由参数与求解精度的关系, 及其影响因素。

1 RBF 法的基本原理

设在二维域 Ω 上有一偏微分方程

$$\left. \begin{aligned} Lu &= f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ u &= g(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \\ \partial u / \partial n &= h(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

依 RBF 法, 其近似解可表示为

$$u_N(x, y) = \sum_{j=1}^{N_I+N_d+N_n} u_j (r_j) \quad (2)$$

其中: u_j 为待定系数; (r_j) 为径向基函数, r_j 是点 (x, y) 与点 (x_j, y_j) 距离的范数, 即 $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$; N 为自然数, $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^{N_I}$ 表示为域 Ω 内部的插值点, $\{(x_j, y_j)\}_{j=N_I+1}^{N_I+N_d}$ 和 $\{(x_j, y_j)\}_{j=N_I+N_d+1}^{N_I+N_d+N_n}$ 分别为本质边界条件和自然边界条件上的插值点。如果这两类边界是重合的, 也可以选取不同的点分别作为各自的离散点。将式(2)代入式(1)得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^N (L u_j) (\sqrt{(x_i, y_i) - (x_j, y_j)}) u_j &= f(x_i, y_i) \\ i &= 1, 2, \dots, N_I \\ \sum_{j=1}^N (g(x_i, y_i) - \sum_{j=1}^N (g(x_i, y_i) - (x_j, y_j)) u_j) &= g(x_i, y_i) \\ i &= N_I + 1, N_I + 2, \dots, N_I + N_d \\ \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial n} (\sqrt{(x_i, y_i) - (x_j, y_j)}) u_j &= h(x_i, y_i) \\ i &= N_I + N_d + 1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

这样可以得到待定系数 $\{u_j\}_{j=1}^N$ ($N = N_I + N_d + N_n$, 为所有的离散点数)。

目前径向基函数的类型有: 高斯函数 $(r) = \exp(-r^2)$ (α 为大于 0 的自由参数)、MQ 函数 $(r) = (r^2 + \alpha^2)^{1/2}$ (α 为大于 0 的自由参数)、 $(r) = r^n$ (n 为正奇数) 以及 Wu^[17] 和 Buhmann^[18] 等构造的具有截断多项式形式的紧支径向基函数。由于第 3 个函数中自由参数的选取规律难找, 第 4 个函数求导后计算公式相对来说较复杂, 本文中径向基函数选取前 2 个函数, 其函数曲线见图 1。

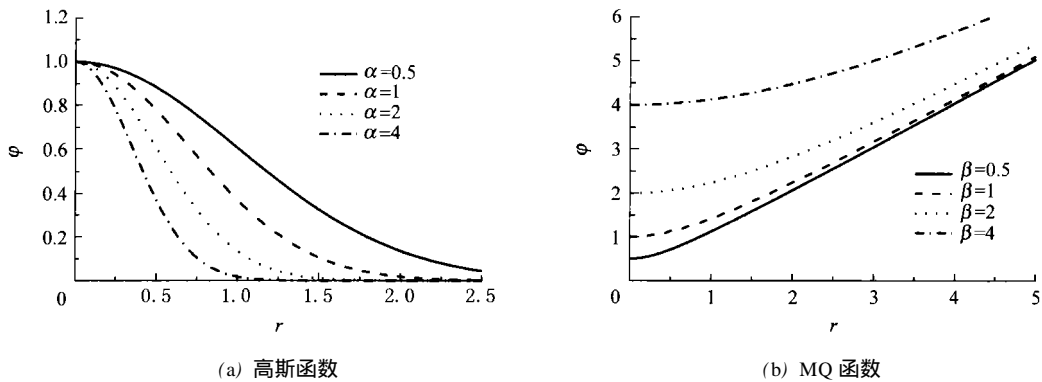


图 1 径向基函数曲线

Fig. 1 Relational curves of radial basis functions

2 数值实验

通过求解一维、二维 Poisson 方程, 探讨径向基函数及其自由参数的性质。本文中误差定义为

$$\frac{| \text{理论解} - \text{数值解} |}{| \text{理论解} |}$$

算例 1: 方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -2 & -1 < x < 1 \\ u &= 0 & x = \pm 1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其精确解为 $u = 1 - x^2$

算例 2: 方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u &= 2(x^2 + y^2 - 2) \\ (x, y) &= [-1, 1] \times [-1, 1] \\ u &= 0 & (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其精确解为 $u(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$

2.1 节点均布情况下径向基函数及其自由参数的性质

采用高斯函数 $(r) = \exp(-r^2)$ 为径向基函数, 研究节点均布时自由参数 α 的取值与计算误差

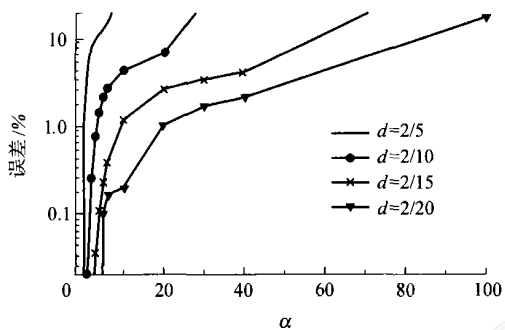
的关系。图 2(a)和(b)分别表示算例 1 和算例 2 在不同节点间距下自由参数 α 与计算误差的关系。可以看出,随着 α 的增大,计算误差越来越大,但这并不意味着为了追求精度 α 可以取到无穷小,因为过小会导致方程奇异而无解。笔者考虑了多种节点间距的情况,对方程进行了求解,得到了算例 1 和

2 中的最佳取值公式:

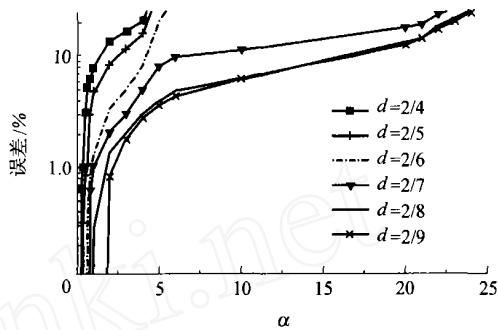
$$= (119.69 d^3 + 0.06)^{-1} \quad (6a)$$

$$= (0.53 d^{-1} - 1.35)^2 \quad (6b)$$

其中 d 为节点间距。对任一节点间距 d , 根据式 (6) 求得自由参数 α 的最佳取值, 从而进行数值计算, 以保证场函数的精确度(误差 1%)。



(a) 算例 1



(b) 算例 2

图 2 不同节点间距时 α 与误差的关系

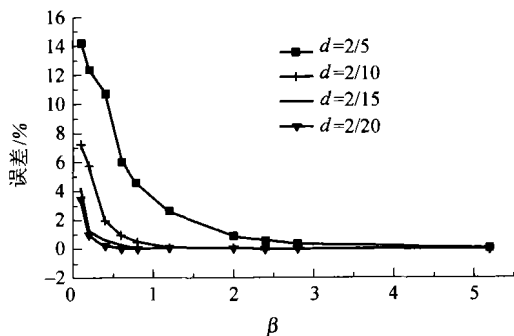
Fig. 2 Relationship between α and error at different nodes distances

采用 MQ 函数 $(r) = (r^2 + \alpha^2)^{1/2}$ 为径向基函数, 研究自由参数 α 的取值与计算误差的关系。不同节点间距下 α 的取值与计算误差的关系见图 3。可以看出,随着 α 的增大,计算误差越来越小,但不能取无穷大,否则会导致方程奇异无解。相应的也建议 2 个计算公式

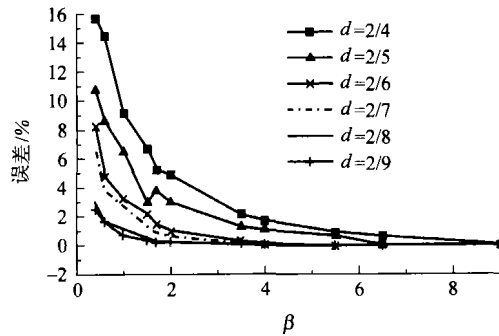
$$= (0.01 d^{-2} + 0.03)^{-1} \quad (7a)$$

$$= (11.86 d^{0.5} - 4.21)^2 \quad (7b)$$

分别表示算例 1 和算例 2 中 α 与 d 的关系等式, 这样得到 α 的最佳取值, 以保证采用其求解时场函数的精确度(误差 1%)。



(a) 算例 1



(b) 算例 2

图 3 不同节点间距时 β 与误差的关系

Fig. 3 Relationship between β and error at different nodes distances

可见,以上 2 个算例中取不同的径向基函数求解场函数时,不同节点间距下自由参数的最佳值可以通过公式得到,并能保证求解精度。RBF 法在选取了合适的径向基函数及其参数后,计算精度好:以算例 2 为例,100 个节点均布情况下,径向基函数取为高斯函数,依式 (6b) 取 1.071,此法的误差为

0.013%; FEM 采用与 RBF 法完全相同的节点分布,四节点矩形单元, 2×2 高斯积分,误差为 1.041%。

2.2 非均布节点情况下径向基函数及其自由参数的性质

对节点不均布的情况本文中对上述 2 个算例分

别进行求解。采用节点分布按偏离度随机分布的方式对节点的非均匀度进行定量表示。在算例 1 中的实现步骤如下:

1) 节点布置: 首先均布 21 个节点, 然后保持边界点的位置不动, 而每个内部节点位置偏移量为 $\pm(tds)$, 其中 t 为 0.1~1 中的任意数(使节点分布在定义域内, 本文中选取其为 0.1, 0.3 和 1), d 为均布节点间距, s 为 0 到 1 之间的随机数。图 4 示出当均布节点间距为 1/4、 t 为 1 时的节点排列情况。

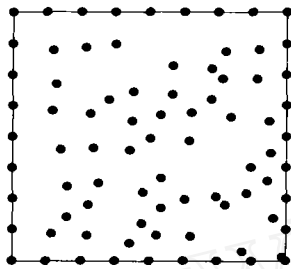
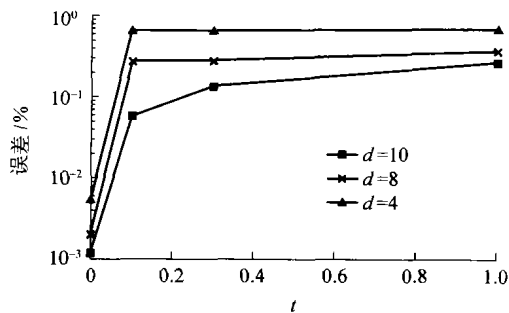
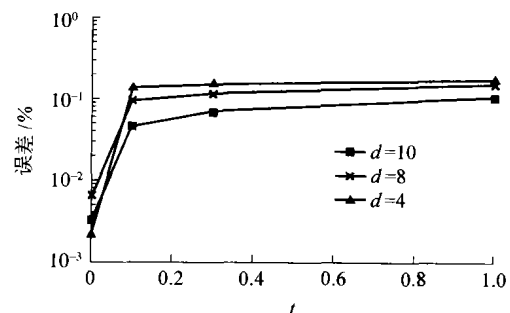


图 4 不规则排列的节点
Fig. 4 Irregular nodes

2) 计算过程: 与 RBF 法相同。分别采用高斯函数和 MQ 函数为径向基函数, 其中, 自由参数的取值同节点均布时, 为 5.565, 为 0.971。



(a) 高斯函数



(b) MQ 函数

图 5 算例 2 节点不均布时参数 t 与误差的关系

Fig. 5 Relationship between t and error at different nodes distances in Solution 2

3 结 论

与有限元相比, 基于径向基函数的无单元法不需要网格剖分, 只需节点信息, 节点可以任意分布, 而且节点位置的改变对计算精度影响不大。

基于径向基函数的无单元法才是真正的无网格法, 其优点是无需数值积分, 是强形式的满足; 相对于其他无单元法, 求解思路直接, 编程简单, 可方便地应用于微分方程边值问题的求解; 如果选择了合适的径向基函数及其自由参数后, 计算精度高。

3) 将步骤 1) 和 2) 重复做 10 次, 每次通过控制随机数, 使节点布置都完全不同。对 10 次计算结果的误差取平均, 作为节点数为 21、自由参数按式 (6a) 和 (7a) 取值、不均布节点情况下的计算误差。

4) 比较 t 分别取 0.1, 0.3 和 1 时, 3 种情况下的计算误差。

5) 把节点数变为 19 和 11 (节点个数 19 时 和 分别为 4.461 和 1.190; 11 时为 0.983 和 3.571) 重复步骤 1)~4)。

对算例 2, 求解方程的过程基本同算例 1, 不同的地方有: 步骤 1) 中的节点个数分别考虑 121, 81 和 25, 而不是 21, 19 和 11; 步骤 2) 中的 t 和 s 要取算例 2 中均布节点间距分别为 1/5, 1/4 和 1/2 时的对应值。

计算结果表明, 算例 1 中不管径向基函数是采用高斯函数还是 MQ 函数, 当自由参数取节点均布时的最佳数值, 且节点不均布时, 计算精度几乎没有变化。算例 2 中自由参数按节点均布时的最佳数值取, 得到的误差曲线见图 5。可见, 节点位置的变化对 RBF 法精度的影响不大, 仍然满足精度要求(工程上对场函数的误差要求 $< 1\%$)。

选用高斯函数或 MQ 函数做径向基函数时, 径向基函数中的自由参数和计算精度之间的关系与解决问题的维数、节点是否均布和节点间距都有关系。本文给出了节点均布情况下自由参数的建议公式。在节点随机排列的情况下, 采用该公式选取自由参数, 求解精度仍然满足工程要求(场函数误差 $< 1\%$)。

参 考 文 献

- [1] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Meshless method: An

- overview and recent developments[J]. *Computer Methods Appl Mech Engrg*, 1996, 139: 3 ~ 47
- [2] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. *Int J Numer Methods Engrg*, 1994, 37: 229 ~ 256
- [3] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements[J]. *Comput Mech*, 1992, 10: 307 ~ 318
- [4] Belytschko T, Gu L, Lu Y Y. Fracture and crack growth by element-free Galerkin method [J]. *Model Simul Mater Sci Engrg*, 1994, 2: 519 ~ 534
- [5] Sukumar N, Moran B, Belytschko T. The natural element method in solid mechanics[J]. *Int J Numer Meth Engrg*, 1998, 43: 839 ~ 887
- [6] Sukumar N, Moran B, Semenov A Y, Belikov V V. Natural neighbour Galerkin methods [J]. *Int J Numer Meth Engrg*, 2001, 50: 1 ~ 27
- [7] Liu G R, Gu Y T. A point interpolation method for two-dimensional solids [J]. *Int J Numer Methods Engrg*, 2001, 50: 937 ~ 951
- [8] Nam M D, Than T C. Numerical solution of differential equations using multiquadric radial basis functional networks[J]. *Neural Networks*, 2001, 14: 185 ~ 199
- [9] 钱向东. 基于紧支径向基函数的配点型无网格法[J]. *河海大学学报*, 2002, 29(1): 96 ~ 98
- [10] 张雄, 宋康祖, 陆明万. 紧支试函数加权残值法[J]. *力学学报*, 2003, 35(1): 43 ~ 49
- [11] Nam M D, Than T C. Numerical solution of elliptic partial differential equation using radial basis function neural networks[J]. *Neural Networks*, 2003, 16: 729 ~ 734
- [12] Li Jichun. A radial basis meshless method for solving inverse boundary value problems[J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2004, 20: 51 ~ 60
- [13] Zhang X, Song K Z, Lu M W etc. Meshless methods based on collocation with radial basis functions [J]. *Comput Mech*, 2000, 26: 333 ~ 343
- [14] Wang J G, Liu G R. A point interpolation method based on radial basis functions[J]. *Int J Numer Methods Engrg*, 2002, 54: 1623 ~ 1648
- [15] Lei Gu. Moving kriging interpolation and element-free Galerkin method [J]. *Int J Numer Methods Engrg*, 2003, 56: 1 ~ 11
- [16] Wu Y L, Liu G R. A meshfree formulation of local radial point interpolation method (LRPIM) for incompressible flow simulation[J]. *Comput Mech*, 2003, 30: 355 ~ 365
- [17] Wu Z M. Compactly supported positive definite radial functions[J]. *Adv in Comput Math*, 1995, 4: 283 ~ 292
- [18] Buhmann M D. Radial functions on compact support [J]. *Proc of Edinburgh Math Soci*, 1998, 41: 33 ~ 46

(上接第 55 页)

实现了嫁接作业的连续;由于操作时间上构成重叠,故提高了嫁接效率。样机实验结果表明:采用 PLC 作为控制器的嫁接机其嫁接速度可达 1 200 ~ 1 380 株/h,与采用单片机控制的嫁接机(600 株/h)相比,工作效率提高了 1 倍多。

参 考 文 献

- [1] 张铁中,徐丽明.大有前景的蔬菜自动嫁接机器人技术[J]. *机器人技术与应用*, 2001, 6(2): 14 ~ 15
- [2] 刘伟力,刘国平,张华. PLC 在爬行式焊接机器人中的应用[J]. *南昌大学学报*, 2003, 25(4): 14 ~ 16
- [3] 柳洪义,宋伟刚. *机器人技术基础*[M]. 北京:冶金工业出版社, 2002. 3 ~ 4
- [4] 张铁中. 蔬菜自动嫁接技术研究[J]. *中国农业大学学报*, 1996, 1(6): 30 ~ 33
- [5] 王英春,徐祖建,秦建华. PLC 在六关节工业机器人控制中的设计应用[J]. *机床与液压*, 2002, (4): 98 ~ 100