

拟 Shannon 区间小波的构造及其在数值逼近中的应用

黄素清¹ 张森文¹ 邢如义²

(1. 暨南大学应用力学研究所, 广州 510632; 2. 河北工程学院, 河北 邯郸 056021)

摘要 为克服拟 Shannon 小波变换边界效应明显, 导致计算精度下降的缺点, 根据插值小波的概念构造了拟 Shannon 区间小波, 给出了在对连续函数进行数值逼近时, 配置点参数 $j = 4, 5$ 时的数值计算结果。随着 j 的增大 $x = 0$ 处的误差越来越突出, 且逼近精度越来越高, 而边界处的逼近误差并不大, 即使 $j = 4$ 时, 边界处也没有明显的震荡现象。与拟 Shannon 小波相比, 拟 Shannon 区间小波不仅精确度更高, 而且能有效消除边界效应。

关键词 拟 Shannon 区间小波; 数值逼近; 边界效应

中图分类号 TP 391

文章编号 1007-4333(2004)03-0067-04

文献标识码 A

Construction of quasi-Shannon interval wavelet and application in numerical approximation

Huang Suqing¹, Zhang Senwen¹, Xing Ruyi²

(1. The Institute of Applied Mechanics, Jinan University, Guangzhou 510632, China;

2. Heibei College of Technology, Heibei Handan 056021, China)

Abstract The quasi-Shannon wavelet has explicit boundary effect which results in poor calculation accuracy. A quasi-Shannon interval wavelet is constructed based on the concept of interpolation wavelet to overcome that shortcoming. The quasi-Shannon wavelet scale function and the quasi-Shannon interval wavelet scale function were both used to simulate a continuous function $f(x)$. The zero continuation method was used in the simulation and the value of collocate point parameter j was specified as 4 and 5. With the increasing of parameter j , the error at $x = 0$ becomes more and more outstanding relative to that at other points, and the numerical precision becomes higher in whole solution domain. It is inspiring that the error is smaller and the Gibbs phenomenon is weaker near the boundary even as $j = 4$. The comparison of the simulation results and corresponding error indicates the quasi-Shannon interval wavelet can eliminate the boundary effect effectively and have higher calculation exactness than the quasi-Shannon wavelet.

Key words quasi-Shannon interval wavelet; numerical approximation; boundary effect

尽管 Shannon 小波具有插值性、连续性、正交性等良好特性, 但由于其不具有紧支撑性, 所以目前应用较少^[1]。拟 Shannon 小波^[2]改善了其紧支撑性, 基本满足了信号处理、数值计算的要求, 但和其他小波一样, 小波变换定义在双边无限的开区间上, 对有限长度的离散数据进行变换时, 必须对其进行处理才能保证原始数据精确恢复。常用的处理方法是对有限长数据进行周期延拓、零延拓或对折延拓。除针对周期信号的周期延拓比较成功外, 其他处理方

法均会造成小波分解系数加长以及产生边界效应。区间小波概念提出前, 求解偏微分方程的小波配置法采用了零延拓的处理方法, 边界效应体现为在边界处的小波系数的绝对值非常大, 其结果是导致边界处的计算误差加大; 因此, 近年来区间小波的研究异常活跃^[3]。本研究的目的是构造拟 Shannon 区间小波, 并比较其与拟 Shannon 小波的性质, 其优越性通过函数逼近得以体现。

收稿日期: 2003-12-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372036); 广东省自然科学基金资助项目(021197)

作者简介: 黄素清, 硕士研究生; 张森文, 教授, 博士生导师, 主要从事小波、分形和随机有限元研究。

1 拟 Shannon 区间小波的构造

1.1 Deslauriers-dubuc 插值滤波器^[3-6]

假定连续函数 $f(x)$ 在离散点集 (又称模板) $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, x_i, x_j 上值为 $\{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)\}$, 通过 n 次多项式 $\sum_{l=0}^n a_l x^l$ 插值估计函数在 $x(x = x_i, i = 0, 1, \dots, n)$ 的值 $f(x)$, 该逐点多项式插值问题可描述如下:

$$\left. \begin{aligned} a_l x_k^l &= f(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, n \\ f(x) &= \sum_{l=0}^n a_l x^l \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)等价于

$$\begin{aligned} f(x) &= [1, x, x^2, \dots, x^n] A^{-1} [f(x_0), \\ & f(x_1), \dots, f(x_n)]^T \end{aligned} \quad (2)$$

矩阵 A 的元素为 $A(p, s) = x_p^s; p, s = 0, 1, 2, \dots, n$, $f(x)$ 表示估计值。式(2)表明, $f(x)$ 估计值等于模板点函数值 $\{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ 的线性组合, 组合系数由 Lagrange 插值公式得到

$$h(x, k) = \prod_{l=0, l \neq k}^n \frac{x_l - x}{x_l - x_k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

从式(3)可以看出, 组合系数 $h(x, k)$ 只依赖于模板和插值点之间的相对位置, 组合系数对坐标的平移和伸缩是不变的。此外, 它的估计精度是 $n + 1$ 阶的, 即对任意一个次数不超过 n 次的多项式, 估计是精确的。

当数据是均匀采样时, 比如, 已知函数在二进制有理点 $\{j/2^N, j \in Z\}$ 的值, 通过固定模板估计二进制有理点 $\left\{ \frac{j}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}}, j \in Z \right\}$ 处的函数值, 相应的组合系数是一个不依赖于 N 和 j , 仅依赖于插值模板的平移不变滤波器, 称这样的滤波器为 Deslauriers-Dubuc 插值滤波器。

1.2 拟 Shannon 区间小波的构造

文献[2]证明了一般插值滤波器可以表示为基于多项式插值的 Deslauriers-dubuc 插值滤波器的线性组合, 因此可以对小波基函数 $\phi_{jk}(x)$ 做如下改造^[5]:

引入 Lagrange 多项式 l_{jk}^1 和 l_{jk}^2

$$\left. \begin{aligned} l_{jk}^1 &= \prod_{i=0, i \neq k}^L \frac{x - x_{ji}}{x_{jk} - x_{ji}} \\ l_{jk}^2 &= \prod_{i=2^j-L, i \neq k}^{2^j} \frac{x - x_{ji}}{x_{jk} - x_{ji}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

然后定义外推权重系数

$$\left. \begin{aligned} a_{nk} &= l_{jk}^1(x_{jn}) \\ b_{nk} &= l_{jk}^2(x_{jn}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

则区间上的插值基函数可表示为

$$\left. \begin{aligned} \phi_{jk} &= (2^j x - k) + \sum_{n=-N+1}^{-1} a_{nk} (2^j x - n), \\ & k = 0, \dots, L \\ \phi_{jk} &= (2^j x - k), k = L + 1, \dots, 2^j - L - 1 \\ \phi_{jk} &= (2^j x - k) + \sum_{n=2^{j+1}}^{2^{j+N}-1} b_{nk} (2^j x - n), \\ & k = 2^j - L, \dots, 2^j \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: $L \in \mathbb{R}$, R 为小波基函数的 Hölder 连续指数 (对拟 Shannon 小波来说, L 取 1 效果较好), N 为小波函数的支撑区间, 即 $\text{supp } \phi = [-N, N]$ 。

不难看出, 拟 Shannon 区间尺度函数 (式(6)) 是拟 Shannon 尺度函数 $\phi_{jk}(x)$ 的线性组合, 因此, 该拟 Shannon 区间尺度函数具有拟 Shannon 尺度函数 $\phi_{jk}(x)$ 的所有性质。

2 拟 Shannon 区间小波在数值逼近中的应用

2.1 区间小波对 Sobolev 空间内函数逼近的基本原理

定义拟 Shannon 区间小波对应的尺度函数空间为

$$V_j = \text{span } \{\phi_{jk}, k = 0, \dots, 2^j\} \subset L^2(a, b) \quad (7)$$

由于区间尺度函数 $\phi_{jk}(x)$ 具有插值特性, 即 $\phi_{jk}(n2^{-j}) = \delta_{nk}$, 所以定义插值算子 $I_j \in C^0(a, b)$ V_j 为

$$I_j f = \sum_{k=0}^{2^j} f(x_{jk}) \phi_{jk} \quad x_{jk} = k2^{-j} \quad (8)$$

其误差估计由定理 1 给出。

定理 1 令 $1 \leq s \leq 2M - 1$ (M 为小波消失矩的阶数), 如果函数 $f \in H^{L+1}(a, b)$, 则

$$|f - I_j f|_{s, (a, b)} \leq C 2^{-j(L+1-s)} |f|_{L+1, (a, b)} \quad (9)$$

2.2 拟 Shannon 区间小波与拟 Shannon 小波对函数的逼近精度

给定函数 (图 1)

$$f(x) = \begin{cases} x & -0.5 \leq x \leq 0 \\ 0.125x & 0 < x \leq 0.5 \end{cases}$$

分别用拟 Shannon 尺度函数和拟 Shannon 区间尺度函数作为基函数对其进行逼近, 结果见图 2。由图 2 不难看出, 随着 j 的增大 (即配置点数量的增加), 对给定函数光滑部分的逼近精度越来越高, 而边界处的逼近误差并没有减小。也就是说, 随着 j 的增大, 边界附近出现振荡的范围越来越窄, 但振荡幅度没

有明显的改变。这是因为在配置法中, 用小波函数作为基函数对给定函数逼近时, 对给定函数采用了零延拓的措施, 即在本例中认为, 当 $x < -0.5$ 或 $x > 0.5$ 时 $f(x) = 0$, 而根据函数 $f(x)$ 的定义可知, $f(-0.5) = -0.5, f(0.5) = -0.0625$, 所以延拓后的 $f(x)$ 在边界处是不连续的 (图 1(b))。由图 2 还可看出, 随着 j 的增大, $x = 0$ 处 (函数突变处) 的误差越来越突出, 且逼近精度越来越高, 而边界处的逼近误差并不大, 即使是 $j = 4$ 时, 边界处也没有明显的振荡现象。这充分表明了拟 Shannon 区间尺度函数对有限长连续信号逼近的优异性能。

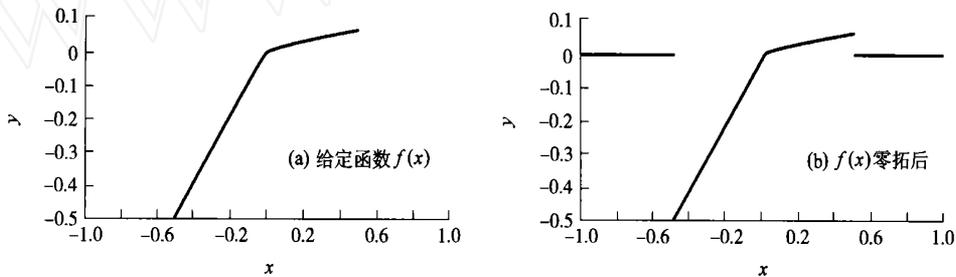


图 1 拟定函数图像

Fig. 1 Graph of the given function $f(x)$

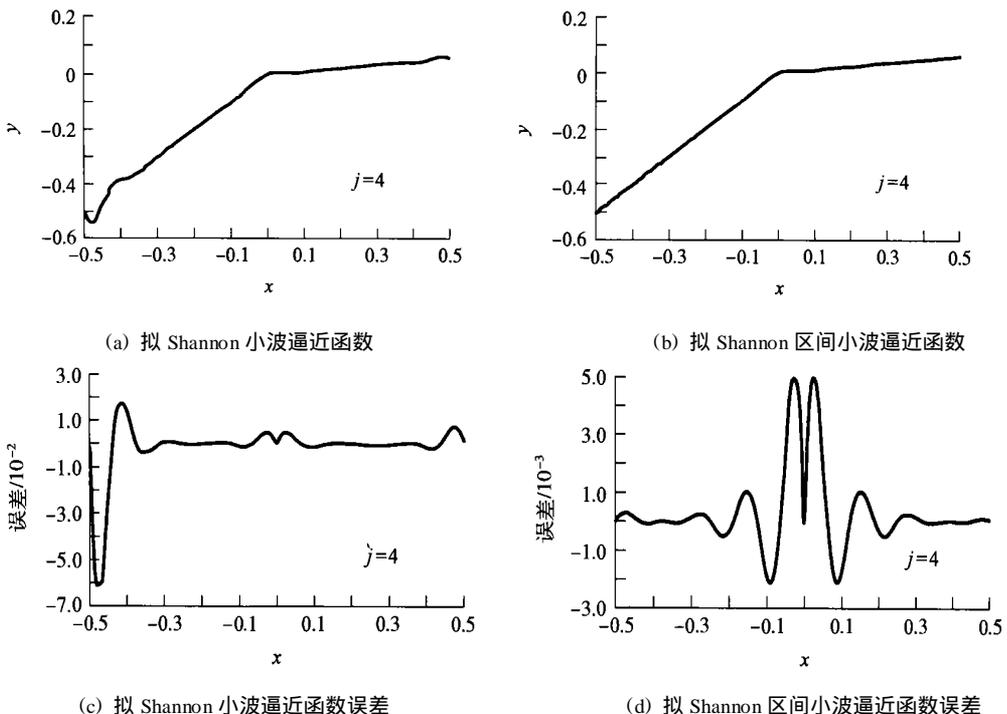


图 2-1 拟 Shannon 小波逼近函数和拟 Shannon 区间小波逼近函数图像

Fig. 2-1 Approximation functions and corresponding errors of quasi-Shannon wavelet and quasi-Shannon interval wavelet

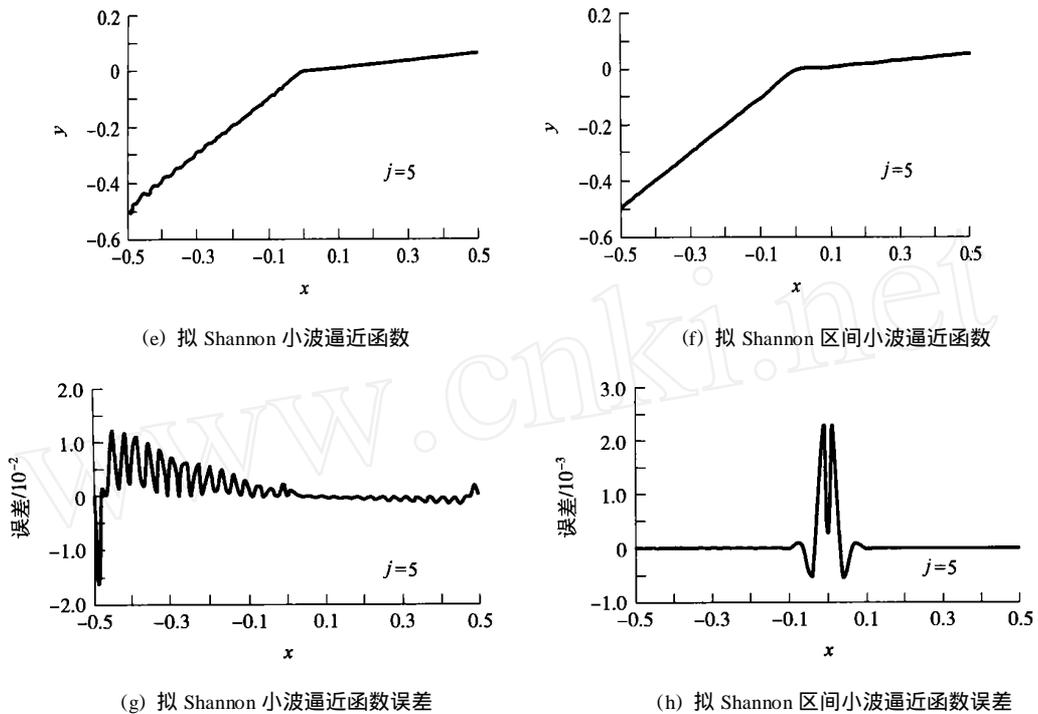


图 2-2 拟 Shannon 小波逼近函数和拟 Shannon 区间小波逼近函数图像

Fig. 2-2 Approximation functions and corresponding errors of quasi-Shannon wavelet and quasi-Shannon interval wavelet

3 结束语

拟 Shannon 小波具有正交性、插值性、紧支撑性、连续性等良好特性,同时具有解析表达式,因此适合于与现有的数值方法结合构造自适应小波数值方法,如小波有限元法、小波配点法、小波 Galerkin 法等。和其他小波一样,小波变换的边界效应影响了小波数值方法的计算精度。本文中构造的拟 Shannon 区间小波可有效消除拟 Shannon 小波变换的边界效应,改善小波数值方法的计算精度。数值算例表明了区间小波的有效性。

参 考 文 献

[1] 李世雄. 小波变换及其应用[M]. 北京:高等教育出版

社,1997. 64~67

- [2] Wei G W. Quasi wavelets and quasi interpolating wavelets[J]. Chem Phys Lett, 1998,296(6):215~222
- [3] Cohen A, Daubechies I, Vial P. Wavelets on the interval and fast wavelet transform[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis,1993(1):54~80
- [4] Donoho D L,Johnstone I M. Aadaptng to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994 (81):425~455
- [5] Deslauriers G, Dubuc S. Symmetric iterative interpolation processes[J]. Constr Approx,1989,5(1):49~68
- [6] Bertoluzza S. Adaptive wavelet collocation method for the solution of burgers equation[J]. Transport Theory and Statistical Physics, 1996,25(3~5):339~352