中国农业大学学报　2004,9(1):60～62
Journal of China Agricultural University

分析非线性随机结构动态响应的等效随机系统法

张 强[1]　焦群英[2]
(1. 上海师范大学 建筑工程学院, 上海 201418; 2. 中国农业大学 理学院,北京 100083)

摘　要　在确定性非线性系统等效线性化方法的基础上,提出了分析含有随机参数的非线性结构动态响应的等效随机系统法。考虑了最一般的多自由度系统,以刚度随机为例推导了等效随机系统法的公式,并给出等效随机系统法的算法。以非线性单自由度系统为算例进行计算,结果表明,等效随机系统法得到的解与 Monte-Carlo 模拟解几乎完全吻合。本方法精度较高,且与 Monte-Carlo 法相比计算时间大大缩短。

关键词　非线性随机结构; 等效随机系统法; 动态响应
中图分类号　O 322　　**文章编号**　1007-4333(2004)01-0060-03　　**文献标识码**　A

A equivalent random system method for analyzing response of nonlinear structures with uncertain physical parameters

Zhang Qiang[1], Jiao Qunying[2]
(1. Architecture Engineering School, Shanghai Teachers University, Shanghai 201418, China;
2. College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract　There are many research papers about mathematic theory of stochastic course and stochastic differential equation, but no a whole theory can be used to analyse nonlinear system. On the base of equivalent linearization method about certain nonlinear system, a equivalent random systems method was developed and used in analyzing the dynamic response of nonlinear random structures. Considering the multi-degree of freedom system, the formula of equivalent random systems method was expounded. The nonlinear mono-degree of freedom system was taken for example. The numerical results showed that the responses of the proposed approach were much close to the Monte-Carlo solutions, and the time used in computing was much less than the Monte-Carlo mothed.

Key words　nonlinear random structures; equivalent random systems method; dynamic response

随机过程的数学理论和随机微分方程研究的进展,促进了随机激励作用下结构响应和稳定性的研究,然而,尚没有一个完整的理论可以推广应用于分析非线性系统。现有的方法对于激励的本质、非线性类型和自由度数,都有其自身的局限性。

Socha 和 Soong[1]以及 Ibrahim[2,3]对随机激励作用下非线性系统的研究方法及其局限性,以及实验结果做了概述。Socha 和 Sooning 在研究受稳态和非稳态随机激励的非线性系统时,突出了统计和等效线性化的方法。目前,常用来解非线性系统响应的数值方法有摄动法(级数解法)和等效线性化法。对于含有随机参数的非线性结构动态响应的研究,仅有少量文献做了初步探讨[4,5]。笔者基于确定性非线性系统等效线性化方法,推导出多自由度随机系统的等效随机系统方法公式,并求出含随机参数的非线性结构动态响应的统计量。

1　等效随机系统法公式的推导

借鉴等效线性化方法的基本思想,对于非线性随机结构,可以设想用一个等效的线性随机结构替代,替代的条件总的说来依然是在某种意义下线性系统的反应可以最优地逼近原非线性系统的反应。由于这里考虑的是随机结构,因此,替代条件应该反映结构响应的随机特征。换句话说,应该从原系统和替代系统的数值特征值的角度考察替代原则。

根据随机结构分析的基本特点及计算上相对简单的考虑,设立 2 条基本替代原则:1) 与替代系统和原系统分别对应的均值参数系统之间差异趋于最

收稿日期: 2003-05-02
基金项目: 上海高校选拔培养优秀青年教师后备人选科研专项基金资助项目
作者简介: 张强,博士,工程师,主要从事含随机参数结构的响应分析研究。

小;2) 对于给定的系统反应,替代系统与原系统的恢复力、阻尼力或惯性力的均方差之差趋于最小。称满足这 2 条原则的替代系统为等效随机系统。

以刚度随机为例推导等效随机系统法的公式(质量和阻尼随机时,同理可以推得),考虑最一般的多自由度系统。当刚度随机时,其运动微分方程为

$$\mathrm{M}\ddot{X} + \mathrm{C}\dot{X} + \mathrm{Q}(X, \theta) = \mathrm{F}(t) \tag{1}$$

假设式(1)的等效随机系统为

$$\mathrm{M_e}\ddot{X} + \mathrm{C_e}\dot{X} + \mathrm{K_e}X = \mathrm{F}(t)$$

式中: $\mathrm{C_e}$, $\mathrm{M_e}$ 和 $\mathrm{K_e}$ 分别为等效随机系统的阻尼矩阵、质量矩阵和刚度矩阵, $\mathrm{C_e} = \mathrm{C}$ 和 $\mathrm{M_e} = \mathrm{M}$ 为确定矩阵, $\mathrm{K_e}$ 为随机矩阵,且

$$\mathrm{K_e} = \mathrm{K_{e0}} + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^* \lambda_j b_j$$

式中: $\mathrm{K_{e0}}$为均值参数矩阵, λ_j 为刚度随机变量的方差, b_j 为标准化随机变量。根据问题的性质, $\mathrm{K_{e0}}$可以取为服从均匀分布或正态分布,有

$$(\mathrm{K_{e0}})_{ij} = E\left[\frac{\partial g_i(\ddot{X}, \dot{X}, X)}{\partial X_j}\right] \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\mathrm{K}_j^* = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}_{ki}^* \mathrm{k}_i^* \mathrm{T}_{ki}$$

式中: T_k 为单元的坐标转换矩阵与定位矩阵的乘积, T_k^* 为 T_k 的转置, k_i^* 为提取方差因子 λ_j 之后的单元刚度矩阵。

对于确定性非线性随机结构问题,等效随机系统的替代原则可以表述为

$$E[\mathrm{e}_2^{\mathrm{T}} \mathrm{e}_2] = \min \tag{2}$$

式中:

$$\mathrm{e}_2 = (\sigma_k[Q(X, k)] - \sigma_b[\mathrm{K_e}X])^{\mathrm{T}}, \sigma_k[Q(X, k)] = (\sigma_{k_1}[f_1(x_1, k_1)], \sigma_{k_2}[f_2(x_2, k_2)], \cdots, \sigma_{k_n}[f_n(x_n, k_n)]);$$

k_i 为刚度随机参数集合, σ_k 表示关于随机变量取均方差。

$$\sigma_b(\mathrm{K_e}X) = (\sigma_{b_1}(k_{e1}x), \sigma_{b_2}(k_{e2}x), \cdots, \sigma_{b_n}(k_{en}x))$$

式中: σ_b 表示关于随机变量 b 取均方差。注意, $\sigma_{b_i}(k_{ei}) = k_{\sigma i}$, $k_{\sigma i}$为第 i 阶刚度随机变量的等效均方差。由式(2),有

$$\frac{\partial E[\mathrm{e}_2^{\mathrm{T}} \mathrm{e}_2]}{\partial k_{\sigma i}} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

可以导出

$$k_{\sigma i} = \frac{E[x_i \sigma_{k_i}\{f_i(x_i, k_i)\}]}{E[x_i^2]}$$

这样就完成了刚度随机时等效随机系统法公式的推导,当质量随机和阻尼随机时,其公式同理可以推得,分别为

$$m_{\sigma i} = \frac{E[x_i \sigma_{m_i}\{f_i(x_i, m_i)\}]}{E[x_i^2]}$$

$$(M_{e0})_{ij} = E\left[\frac{\partial g_i(\ddot{X}, \dot{X}, X)}{\partial \ddot{X}_j}\right] \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$c_{\sigma i} = \frac{E[x_i \sigma_{c_i}\{f_i(x_i, c_i)\}]}{E[x_i^2]}$$

$$(C_{e0})_{ij} = E\left[\frac{\partial g_i(\ddot{X}, \dot{X}, X)}{\partial \dot{X}_j}\right] \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

2　等效随机系统法的算法

可循如下迭代过程求解非线性随机结构:

1) 设定系统响应均值和方差的初值;

2) 计算刚度、质量、阻尼的均值和均方差;

3) 用扩阶系统方法求解等效随机系统;

4) 把求得的系统响应均值和方差用于求解等效随机系统的刚度、质量、阻尼的均值和均方差;

5) 返回 2),并重复 2) 到 4),直到均值和均方差参数收敛为止。

显然,在求得收敛的等效系统方差参数的同时,也得到了原非线性随机结构系统动态响应的统计特性。以等效随机系统解答逼近非线性随机系统的解答,这类算法可称为等效随机系统法。

3　非线性单自由度情况

单自由度系统

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x + \varepsilon x^3) = f(t) \tag{3}$$

式中: m 和 c 为确定的质量和阻尼; k 为随机刚度, $k = k_0 + k_1 b$, k_0 和 k_1 为刚度的均值和均方差, b 为成正态分布的标准化随机变量。假设式(3)的等效随机系统为

$$m_e\ddot{x} + c_e\dot{x} + k_e x = f(t)$$

式中: m_e 和 c_e 为确定的等效质量和等效阻尼, k_e 为等效随机刚度, $k_e = k_{e0} + k_\sigma b$, k_{e0}和 k_σ 为等效刚度的均值和均方差, b 为成正态分布的标准化随机变量;则

$$g(x, \dot{x}, \ddot{x}) = m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x + \varepsilon x^3)$$

所以, $m_e = m$, $c_e = c$,

$$k_{e0} = E\left[\frac{\partial g(x, \dot{x}, \ddot{x})}{\partial x}\right] = E[k(1 + 3\varepsilon x^2)] =$$

$$E[k] + 3\varepsilon E[k]\{E^2[x] + x_\sigma^2\} = k_0 + 3k_0\varepsilon\{E^2[x] + x_\sigma^2\}$$

又

$$\begin{aligned} e_2 &= \{\sigma_k[Q(x,k)] - \sigma_b[k_e x]\} = \\ &\{\sigma_k[k(x + \varepsilon x^3)] - \sigma_b[k_e x]\} = \\ &\{k_1(x + \varepsilon x^3) - k_\sigma x\} \end{aligned}$$

由 $\frac{\partial E[e_2^2]}{\partial k_\sigma} = 0$,可得

$$k_\sigma = \frac{k_1(E[x^2] + \varepsilon E[x^4])}{E[x^2]} \quad (4)$$

注意到[6]

$$E[x^2] = E^2[x] + \sigma_x^2 \quad (5)$$

$$E[x^4] = E^2[x^2] + \sigma^2[x^2] = \{E^2[x] + \sigma_x^2\}^2 + 2\sigma_x^4 + 4\sigma_x^2 E^2[x] \quad (6)$$

把式(5)和(6)代入(4),得到

$$k_\sigma = k_1\left(1 + \frac{\varepsilon\{(E^2[x] + \sigma_x^2)^2 + 2\sigma_x^4 + 4\sigma_x^2 E^2[x]\}}{E^2[x] + \sigma_x^2}\right)$$

4 算 例

取 $m = 1.0$, $c = 1.0$, $k_0 = 1.0$, $k_1 = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$,初始位移为 1.0,初始速度和外载均为 0;计算时取 $dt = 0.01$。计算结果见图 1。可以看出,本文解与 Monte-Carlo 的模拟结果几乎完全吻合。与 Monte-Carlo 法相比,本方法的计算时间大大缩短。

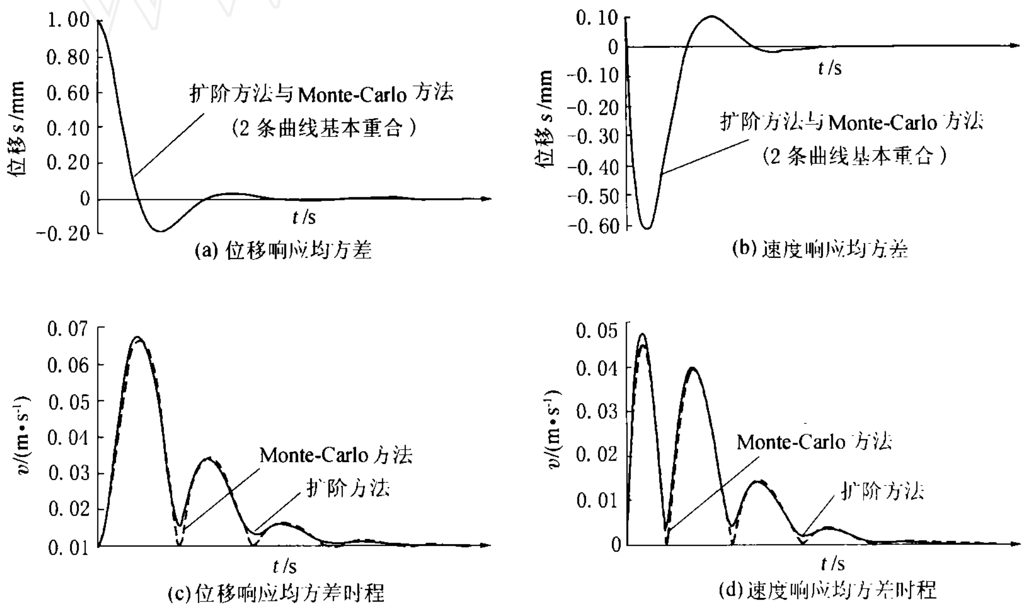

图 1 扩阶方法与 Monte-Carlo 方法的计算结果

Fig. 1 The numerical results of the order-expansion method and the Monte-Carlo method

5 结 论

1) 在等效线性化的基础上提出了分析非线性随机结构的等效随机系统法,推导了相应的多自由度的计算公式,给出了算法,编制了非线性迭代计算程序。算例计算结果表明,本文解与 Monte-Carlo 模拟解相吻合,曲线几乎重合。等效随机系统法方法简单,应用方便,算例精度较高,与 Monte-Carlo 法相比计算时间明显缩短,可应用于处理非线性随机动力问题。

2) 等效随机系统法适用于质量、刚度和阻尼随机时的情况,而且可解参数的随机和非线性相互耦合问题。

参 考 文 献

[1] Socha L, Soong T T. Linearization in analysis of nonlinear stochastic systems[J]. Appl Mech Rev, 1991, 44(10): 399～422

[2] Ibrahim R A. Nonlinear random vibration: experimental results[J]. Appll Mech Rev, 1991, 44(10): 423～446

[3] Ibrahim R A. Recent results in random vibrations of nonlinear mechanical systems[J]. ASME Special 50 Anniversary Design Issue, 1995, 117: 222～233

[4] Klosner J M, Haber S F, Uoltz P. Response of nonlinear systems with parameter uncertainties[J]. Int J Nonlinear Mech, 1992, 27(4): 547～563

[5] Wilfred D I, Ching Tunghuang. On the dynamic response of non-linear systems with parameter uncertainties[J]. Int J Nonlinear Mech, 1996, 31(5): 631～645

[6] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京:科学出版社, 1992