中国农业大学学报 2003,8(4):1～4
Journal of China Agricultural University

一类具有时滞的Lienard方程的Hopf分支

马苏奇[1,2] 陆启韶[2]
(1. 中国农业大学 理学院,北京 100083;2. 北京航空航天大学 一般力学系,北京 100083)

摘 要 研究了一类时滞Lienard方程的稳定性及其Hopf分支问题。以滞量作为参数,分析了方程的零解的稳定性,得到了Hopf分支值;应用中心流形和规范型理论,得到了确定Hopf分支方向和分支周期解稳定性的计算公式。给出了一个具体的超临界Hopf分岔的例子,表明理论分析和数值计算结果具有一致性。

关键词 时滞微分方程;Hopf分岔;稳定性
中图分类号 O175.13 **文章编号** 1007-4333(2003)04-0001-04 **文献标识码** A

Hopf bifurcation of a lienard differential equation with delay

Ma Suqi[1,2], Lu Qishao[2]
(1. College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, China;
2. School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract A Lienard differential equation with time-delay is studied. The time delay r can qualitatively change the dynamics. Choosing time delay r as parameter, when r increases, the unique equilibrium can switch from being stable to unstable, thus Hopf bifurcation happens. The bifurcation direction is also computed by using the normal form method.
Key words delay; Hopf bifurcation; Lienard differential equation

1 零解的稳定性和Hopf分岔

时滞Lienard方程

$$\ddot{x}(t)+f(x(t))\dot{x}(t-r)+g(x(t-r))=0 \quad (1)$$

其中:$f(x)$,$g(x)$为连续可微函数,t表示时间,r为滞量,且有$f(0)=k$,$g(0)=0$,$g'(0)=1$。方程(1)的线性化系统的特征方程为

$$\lambda^2+ke^{-\lambda r}\lambda+e^{-\lambda r}=0 \quad (2)$$

令特征值$\lambda=iw$(设$w>0$),可得

$$\begin{cases}-w^2+wk\sin(wr)+\cos(wr)=0\\ -wk\cos(wr)+\sin(wr)=0\end{cases}$$

所以

$$\left.\begin{aligned}w^2k^2+1&=w^4\\ \tan(wr)&=kw\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

显然,方程(3)有惟一正实根$w_0=\sqrt{\dfrac{k^2+\sqrt{k^4+4}}{2}}$,并且此时$r_n=\dfrac{\arctan(kw_0)}{w_0}+2n\pi$,其中$n=0,1,2\cdots$;所以有引理1和引理2。

引理1 特征方程(2)当$r=r_n$时有一对简单纯虚根$\pm iw_0$,其中r_n,w_0同上定义。

引理2 设$\lambda(r)=\alpha(r)+iw(r)$为特征方程(2)的根,则$\left.\dfrac{d\alpha(r)}{dr}\right|_{r=r_n}>0$。

证明:显然,根$\lambda(r)$满足$\alpha(r_n)=0$,$w(r_n)=\pm w_0$。将$\lambda(r)=\alpha(r)+iw(r)$代入特征方程(2),并分离其实部和虚部,得

$$\left.\begin{aligned}&e^{\alpha r}(\alpha^2-w^2)+[k\alpha\cos(wr)+\\ &\qquad kw\sin(wr)+\cos(wr)]=0\\ &2\alpha we^{\alpha r}+[kw\cos(wr)-\\ &\qquad k\alpha\sin(wr)-\sin(wr)]=0\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

方程(4)两边在$r=r_n$处求导,并注意到式(3)成立,可得

收稿日期:2002-12-30
基金项目:国家自然科学基金资助(No.10172011)
作者简介:马苏奇,博士生;陆启韶,博士生导师,教授,主要研究方向为一般力学

$$\left.\begin{aligned}&[k\cos(w_0 r_n)-r_n w_0^2]\dot{\alpha}+\\&\qquad[k\sin(w_0 r_n)-2w_0]\dot{w}=0\\&[2w_0-k\sin(w_0 r_n)]\dot{\alpha}+\\&\qquad[k\cos(w_0 r_n)-r_n w_0^2]\dot{\omega}=w_0^3\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_n}=$$

$$\frac{-w_0^3[k\sin(w_0 r_n)-2w_0]}{[k\cos(w_0 r_n)-r_n w_0^2]^2+[k\sin(w_0 r_n)-2w_0]^2}$$

由方程(3),得

$$k\sin(w_0 r_n)-2w_0=\frac{k^2 w_0^3}{k^2 w_0^2+1}-2w_0=$$

$$\frac{-k^2 w_0^3-2w_0}{k^2 w_0^2+1}<0$$

因此$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}r}>0$。结论得证。

因为当 $r=0$ 时,特征方程(2)的根具有严格的负实部,且 r 由小变大穿过 $r=r_n(n=0,1,\cdots)$ 时,有一对复共轭特征根的实部由正变负,所以由 Hopf 分岔定理[1]得到:

引理 3　对方程(1),有

1) $r\in(0,r_0)$ 时,其零解渐近稳定。

2) 在 $r=r_n(n=0,1,\cdots)$ 处发生 Hopf 分岔。

2　Hopf 分岔分析

若设 $\dot{x}=y$,可得到方程(1)的等价一阶方程组

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=y\\&\dot{y}=-f(x)y(t-r)-g(x(t-r))\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

在原点的充分小邻域内,将方程(6)的右边进行泰勒展开,得

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=y\\&\dot{y}=-ky(t-r)-x(t-r)-\frac{\boxed{g''(0)x^2(t-r)}}{2}-\\&\quad\frac{\boxed{g'''(0)x^3(t-r)}}{6}-f'(0)xy(t-r)-\\&\quad\frac{\boxed{f''(0)x^2y(t-r)}}{2}-\cdots\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

方程(7)右端的非线性项为

$$h=\begin{pmatrix}0\\-\frac{\boxed{g''(0)x^2(t-r)}}{2}-\frac{\boxed{g'''(0)x^3(t-r)}}{6}-\\f'(0)xy(t-r)-\frac{\boxed{f''(0)x^2y(t-r)}}{2}-\cdots\end{pmatrix}\quad(8)$$

记 $C=C([-r,0],\mathbf{R}^2)$,对任意的 $\phi\in C$,定义 $\|\phi\|=\sup_{-r\le\theta\le0}|\phi(\theta)|$。如果对 $z_t\in C$ 定义 $z_t(\theta)=z(t+\theta)$, $-r\le\theta\le0$,则方程(8)可表示成泛函微分方程

$$\dot{z}=\mathbf{D}z_t+\mathbf{Q}z_t\quad(9)$$

其中 $z=(x,y)^{\mathrm{T}}$,$\mathbf{D}:C\to\mathbf{R}^2$ 是线性算子,对任意的 $\phi\in C$,

$$\mathbf{D}\phi=\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta} & -r\le\theta\le0\\L\phi & \theta=0\end{cases}\quad(10)$$

$$\mathbf{Q}\phi(\theta)=\begin{cases}(0,0)^{\mathrm{T}} & -r\le\theta\le0\\h(\phi) & \theta=0\end{cases}\quad(11)$$

由 Riesz 表示定理,存在分量为有界变差函数的二阶矩阵 $\eta:[-r,0]\to\mathbf{R}^{2\times2}$,使得

$$L\phi=\int_r^0[\mathrm{d}\eta(s)]\phi(s)\quad(12)$$

记 C^*是 C 的对偶空间,对 $\psi\in C^*$,定义

$$\mathrm{D}^*\psi(\xi)=\begin{cases}-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi} & 0<\xi\le r\\\int_r^0[\mathrm{d}\eta^{\mathrm{T}}(t)]\psi(-t) & \xi=0\end{cases}\quad(13)$$

对 $\phi\in C([-r,0],\mathbf{R}^2)$,$\psi\in C^*([0,r],\mathbf{R}^2)$,定义

$$\langle\psi,\phi\rangle=\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(0)\phi(0)-\int_{\theta=-r}^{0}\int_{\xi=0}^{\theta}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(\xi-\theta)[\mathrm{d}\eta(\theta)]\phi(\xi)\mathrm{d}\xi\quad(14)$$

则 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{D}^*$按上述对偶积互为共轭算子。

设 $q(\theta)$与 $q^*(\xi)$分别是算子 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{D}^*$当 $r=r_0$ 时相应于特征值 iw_0 和 $-iw_0$ 的特征向量,即

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{D}q(\theta)=iw_0q(\theta)\\&\mathbf{D}^*q^*(\xi)=-iw_0q^*(\xi)\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

引理 4　容易通过直接证明得知 $q(\theta)=(1,\delta)^{\mathrm{T}}e^{iw_0\theta}$, $-r\le\theta\le\theta$,和 $q^*(\xi)=N(\beta,1)^{\mathrm{T}}e^{iw_0\xi}$,$0\le\xi\le r$,并且$\langle q^*,q\rangle=1$,其中 $\delta=iw_0$,$\beta=\frac{e^{iw_0r_0}}{iw_0}$且

$$N=\frac{1}{\beta+\bar{\delta}-(1+k\bar{\delta})r_0\mathrm{e}^{iw_0r_0}}=$$

$$\frac{iw_0}{[\cos(w_0 r_0) + w_0^2] + i[\sin(w_0 r_0) - w_0^3 - r_0]}$$

令 $\Lambda = \{iw_0, -iw_0\}$，则存在 C 的一个直和分解 $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$，其中 P_Λ 是算子 D 相应于 Λ 的特征向量，Q_Λ 是 P_Λ 的补空间。又设 $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ 是 P_Λ 的一个基，由 Hale (1993) 的结果，当 $r = r_0$ 时，方程(6)的局部中心流形是

$$M = \{z_t \in C : z_t = \Phi z + u(z, h(\phi))\}$$

其中 $z = (x, y)^{\mathrm{T}}$ 属于原点的某一领域，$u \in Q_A$，

$$h(\phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g''(0)\phi_1^2(-r)}{2} - \frac{g'''(0)\phi_1^3(-r)}{6} - f'(0)\phi_1(0)\phi_2(-r) - \\ \frac{f''(0)\phi_1^2(0)\phi_2(-r)}{2} - \cdots \end{pmatrix}$$

且 $z(t)$ 满足自治的微分方程

$$\dot z = \begin{pmatrix} 0 & -w_0 \\ w_0 & 0 \end{pmatrix} z + \psi(0)\, h(\Phi z) \tag{16}$$

且 $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ 是 P_Λ 的一个对偶基。由引理 4，得到

$$\phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(w_0\theta) & \sin(w_0\theta) \\ -w_0\sin(w_0\theta) & w_0\cos(w_0\theta) \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,N\,\mathrm{Re}\beta - \mathrm{Im}\,N\,\mathrm{Im}\beta & \mathrm{Re}\,N\,\mathrm{Im}\beta + \mathrm{Im}\,N\,\mathrm{Re}\beta \\ \mathrm{Re}\,N & \mathrm{Im}\,N \end{pmatrix} \tag{18}$$

所以

$$\Phi z = \begin{pmatrix} x\cos(w_0\theta) + y\sin(w_0\theta) \\ -w_0 x\sin(w_0\theta) + w_0 y\cos(w_0\theta) \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$h(\Phi z) = \begin{pmatrix} 0 \\ h_2(x, y) \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$h_2(x, y) = l_1 x^2 + l_2 xy + l_3 y^2 + l_4 x^3 + l_5 x^2 y + l_6 xy^2 + l_7 y^3 + O(\rho^4) \tag{21}$$

其中

$$l_1 = -\left(\frac{\boxed{g''(0)}}{2}\cos^2(w_0 r_0) + w_0 f'(0)\sin(w_0 r_0)\right)$$

$$l_2 = \frac{\boxed{g''(0)}}{2}\sin(2w_0 r_0) - w_0 f'(0)\sin(w_0 r_0)$$

$$l_3 = \frac{\boxed{g''(0)}}{2}\sin^2(w_0 r_0)$$

$$l_4 = -\left(\frac{\boxed{g'''(0)}}{6}\cos^3(w_0 r_0) + \frac{\boxed{f''(0)}}{2} w_0\sin(w_0 r_0)\right)$$

$$l_5 = \frac{\boxed{g'''(0)}}{2}\sin(w_0 r_0)\cos^2(w_0 r_0) - \frac{\boxed{f''(0)}}{2} w_0\sin(w_0 r_0)$$

$$l_6 = -\frac{\boxed{g'''(0)}}{2}\sin^2(w_0 r_0)\cos(w_0 r_0)$$

$$l_7 = \frac{\boxed{g'''(0)}}{6}\sin^3(w_0 r_0)$$

将式(18)和(20)代入式(16)，得

$$\left.\begin{aligned} \dot x &= -wy + (\mathrm{Re}\,N\,\mathrm{Im}\beta + \mathrm{Im}\,N\,\mathrm{Re}\beta)\, h_2(x, y) \\ \dot y &= wx + \mathrm{Im}\,N h_2(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

由引理 4，计算得

$$\mathrm{Re}\,N\,\mathrm{Im}\beta + \mathrm{Im}\,N\,\mathrm{Re}\beta = \mathrm{Im}(N\beta) = -\frac{w_0^2\sin(w_0 r_0) + w_0^3 r_0\cos(w_0 r_0)}{[\cos(w_0 r_0) + w_0^2]^2 + [\sin(w_0 r_0) - w_0^3 r_0]^2}$$

$$\mathrm{Im}\,N = \frac{w_0[\cos(w_0 r_0) + w_0^2]}{[\cos(w_0 r_0) + w_0^2]^2 + [\sin(w_0 r_0) - w_0^3 r_0]^2}$$

通过近似恒等变换，方程(22)可以简化为三阶范式(Guckenheimer & Holmes, 1983)

$$\left.\begin{aligned} \dot x &= a(x^2 + y^2)x - [w_0 + b(x^2 + y^2)]y + O(\rho^4) \\ \dot y &= [w_0 + b(x^2 + y^2)]x + a(x^2 + y^2)y + O(\rho^4) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

化为极坐标形式，得

$$\left.\begin{aligned} \dot\rho &= a\rho^3 + O(\rho^4) \\ \dot\theta &= w_0 + b\rho^2 + O(\rho^3) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

其普适开折为

$$\begin{aligned} \dot\rho &= \mu\rho + a\rho^3 + O(\rho^4) \\ \dot\theta &= w_0 + b\rho^2 + O(\rho^3) \end{aligned} \tag{25}$$

这里 μ 是一个开折参数，系数 a 为

$$\begin{aligned} a = {} & \frac{1}{8}(3\,\mathrm{Im}\,N\beta)\cdot l_4 + \mathrm{Im}(N\beta)\cdot l_6 + \mathrm{Im}(N)\cdot l_5 + \\ & 3\,\mathrm{Im}(N)\cdot l_7) + \frac{1}{8w_0}[\mathrm{Im}(N\beta)\cdot l_2(\mathrm{Im}(N\beta)\cdot l_1 + \\ & \mathrm{Im}(N\beta)\cdot l_3) - \mathrm{Im}(N)\cdot \mathrm{Im}(N)\cdot l_2(l_1 + l_3) - \\ & 2\,\mathrm{Im}(N)\,\mathrm{Im}(N\beta)(l_1^2 - l_3^2)] = \\ & \frac{1}{16\{[\cos(w_0 r_0) + w_0^2]^2 + [\sin(w_0 r_0) - w_0^3 r_0]^2\} w_0^6}\cdot \\ & (mg'''(0) + nf''(0)) + \\ & \frac{1}{16\{[\cos(w_0 r_0) + w_0^2]^2 + [\sin(w_0 r_0) - w_0^3 r_0]^2\} w_0^{10}}\cdot \\ & (sg''^2(0) + wf'(0)g''(0) + vf'^2(0)) \end{aligned}$$

其中:

$$m = k - kw_0 - r_0 w_0 + k^3 w_0^2 - k^3 w_0^3 - k^2 r_0 w_0^3 + kw_0^4 + k^3 w_0^6$$

$$n = -kw_0^5 - 3k^2 w_0^7 - 3kr_0 w_0^7 - kw_0^9$$

$$s = k - kw_0 - r_0 w_0 + k^3 w_0^2 + 2kw_0^4 - k^3 w_0^4 - 2k^2 r_0 w_0^4 - kr_0^2 w_0^4 - kw_0^5 + k^5 w_0^5 - r_0 w_0^5 + k^4 r_0 w_0^5 + 2k^3 w_0^6 - k^3 w_0^6 - 2k^4 r_0 w_0^6 - k^3 r_0^2 w_0^6 + kw_0^8 + k^5 w_0^9 + k^4 r_0 w_0^9 + k^3 w_0^{10}$$

$$w = -kw_0^3 + 2k^2 w_0^4 - 4k^2 w_0^5 - k^3 w_0^5 - 4kr_0 w_0^5 - 2kw_0^7 + k^3 w_0^7 + 2k^2 r_0 w_0^7 + kr_0^2 w_0^7 + 4k^2 w_0^8 - 2k^4 w_0^8 - 4k^3 r_0 w_0^8 - 2k^2 r_0^2 w_0^8 - 4k^2 w_0^9 - 2k^3 w_0^9 + k^5 w_0^9 - 4kr_0 w_0^9 + 2k^4 r_0 w_0^9 + k^3 r_0^2 w_0^9 - kw_0^{11} + 2k^2 w_0^{12} - k^3 w_0^{13}$$

$$v = -2k^2 w_0^7 - 4k^3 w_0^9 - 4k^2 r_0 w_0^9 - 4k^2 w_0^{11} + 2k^4 w_0^{11} + 4k^3 r_0 w_0^{11} + 2k^2 r_0^2 w_0^{11} - 4k^3 w_0^{13} - 4k^2 r_0 w_0^{13} - 2k^2 w_0^{15}$$

可见，a 的正负与 $f(x(t))$ 和 $g(x(t))$ 有关。

定理 1 方程(1)在 $r = r_0$ 时发生 Hopf 分岔，且如果 $a > 0$，则是亚临界的，即当 $r < r_0$ 时，在原点附近分支出惟一的不稳定的极限环；如果 $a < 0$，则是超临界的，即当 $r > r_0$ 时，在原点附近分支出惟一的稳定的极限环。

3 算 例

给出一个例子来验证理论分析和数值计算结果的一致性。对方程

$$x'' + 0.1x'(t - r) + 0.1x(t - r) - x^2(t - r) = 0 \tag{26}$$

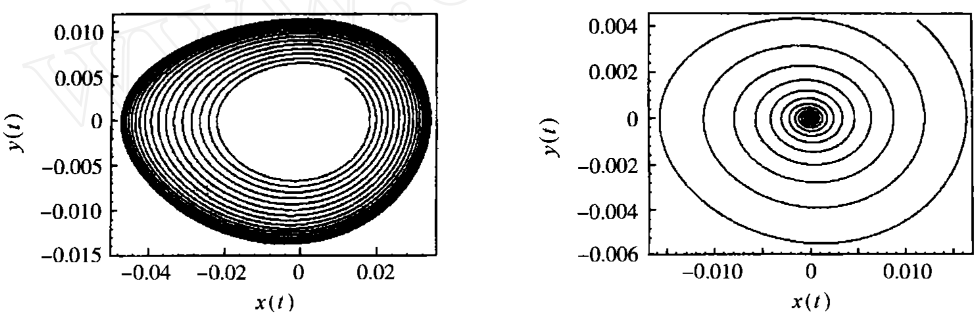
容易计算得 Hopf 分岔参数值

$$r_0 = 0.324\,229\,736\,4\cdots$$

分别取 $r = 0.124\,229\,736\,4\cdots < r_0$

和 $r = 0.524\,229\,736\,4\cdots > r_0$

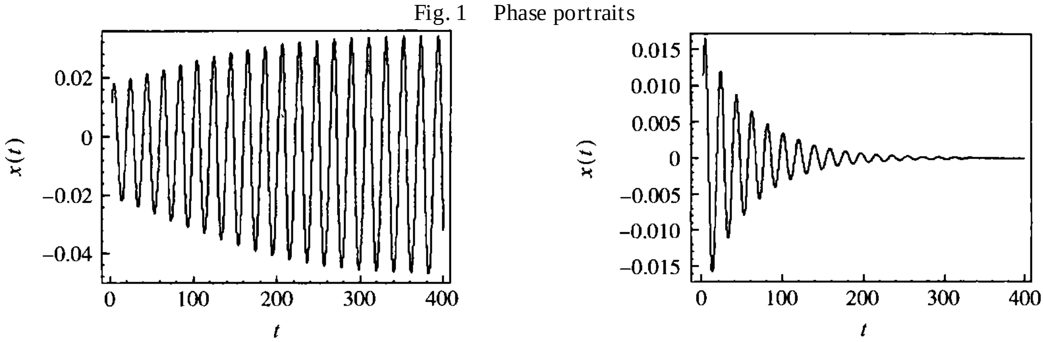
借助 Maple 软件得到了方程(26)的相图(图 1)和时间序列解(图 2)。



(a) $r < r_0$ (b) $r > r_0$

图 1 相图

Fig. 1 Phase portraits



(a) $r < r_0$ (b) $r > r_0$

图 2 时间序列解

Fig. 2 Time series solutions

从图 1 和图 2 可以看出，Hpof 分岔是超临界的。

参 考 文 献

[1] Hale J K. Introduction to Functional differential Equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 227～268

[2] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Number 42 in applied mathematical sciences[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983. 117～156