

整体正交多项式法识别模态参数的改进

焦群英 陈奎孚

(中国农业大学 理学院,北京 100083)

摘要 Richardson 正交多项式法识别动力学参数已得到广泛应用,但其识别结果不是最小方差估计,且算法运算量大。研究提出了通过引入误差权函数来降低估计方差,对分子和分母采用相同的正交多项式基函数来降低算法复杂性和运算量的一种新算法。无噪声算例的估计结果验证了该算法的可行性;有噪声算例的识别结果表明,引入误差权函数可显著提高识别精度;权函数可通过迭代确定,采用原点导纳的虚部可降低迭代次数,甚至无须迭代。

关键词 振动; 模态识别; 多项式; 有理多项式; 曲线拟合; 参数估计; 方差

中图分类号 O 241.5; O 327

文章编号 1007-4333(2003)02-0001-06

文献标识码 A

Improvements of identification modal parameters by orthogonal polynomial method

Jiao Qunying, Chen Kuifu

(College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract The modal parameters' identification by global orthogonal polynomial method proposed by Richardson, has been accepted widely. Nevertheless, it isn't the least variance estimation, the algorithm is very complicated, and the computation work is rather heavy. The improved method can reduce the estimation variance by including an extra error weighting function (EEWF), and the computation amount will be reduced with the base functions of denominator and numerator being chosen as identical series of orthogonal polynomials. The estimation results of the example without noise showed the validity of the new algorithm. For the example with noise, it is shown that the introducing of EEWF can improve the estimation precision efficiently, which can be obtained by iteration, and if the imaginary part absolute of the driving point compliance is adopted as the initial value of EEWF, the iteration times can be decreased down.

Key words vibration; identification of modal parameters; polynomial; rational polynomial; curve fitting; parameter estimation; variance

正交多项式法识别动力学参数具有很多独特的优点,自从被提出以来^[1~3],已广为模态分析研究人员所接受^[4~15]。虽然很多文献使用该算法的估计结果是无偏的,但并不是最小方差的,当信噪比较低时,其识别精度显著下降。另外有些文献中的算法比较复杂,运算量很大。本文中研究如何在保证正交多项式法的优越性的同时,进一步减小估计的方差,降低算法的复杂性和运算量。

n 自由度线性振动系统的单输入单输出 (Single Input & Single Output, SISO) 传递函数 $H(s)$ 可表

示为

$$H(s) = A(s) / B(s) \quad (1)$$

其中分子 $A(s)$ 和分母 $B(s)$ 均为实系数多项式,可表示为

$$\left. \begin{aligned} A(s) &= a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_Ms^M = \sum_{i=0}^M a_i s^i \\ B(s) &= b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_Ns^N = \sum_{i=0}^N b_i s^i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中: a_i 和 b_i 为多项式的幂项系数,分别构成 2 个

收稿日期:2002-08-29

作者简介:焦群英,博士生导师,教授,主要从事振动信号分析和控制方面研究。

实的幂项系数向量 $A = \{a_0, a_1, \dots, a_M\}^T$, $B = \{b_0, b_1, \dots, b_N\}^T$; M 和 N 分别为分子多项式和分母多项式的次数。就完备的模式有 $M = 2n - 2$ 和 $N = 2n$, 但对于频域分段拟合, M, N 不再有上述限制。通常规定 $b_N = 1$ 。

1 SISO 频响函数的拟合

直接利用式(1)和(2)之间的关系建立的识别方法就是 Levy 法, 其数值性态很差。Miramand 等^[16]曾报告对 20 ~ 500 Hz 内有 5 阶模态的机床结构, Levy 法的线性方程组系数矩阵的条件数高达 10^{70} 。为了改善数值性态, 可将式(2)写成更一般的形式

$$\left. \begin{aligned} A(s) &= c_0 + c_1 p_1(s) + c_2 p_2(s) + \dots + \\ &\quad c_M p_M(s) = \sum_{i=0}^M c_i p_i(s) \\ B(s) &= d_0 + d_1 q_1(s) + d_2 q_2(s) + \dots + \\ &\quad d_N q_N(s) = \sum_{i=0}^N d_i q_i(s) \end{aligned} \right\} (3)$$

其中: $p_0(s), p_1(s), \dots, p_M(s)$ 和 $q_0(s), q_1(s), \dots, q_N(s)$ 分别为 2 组基函数系, 前者是 $M + 1$ 个次数不高于 M 次的多项式, 后者是 $N + 1$ 个不高于 N 次的多项式; c_k 和 d_k 为广义多项式系数。

显然对 $A(s)$ 和 $B(s)$ 同乘一个常数, 并不改变 $H(s)$, 为了使计算结果具有惟一性, 而不失一般性, 可取 $d_N = 1$ 。记广义多项式系数向量 C 和 D 为

$$\begin{aligned} C &= \{c_0, c_1, \dots, c_M\}^T = \{c_i\}_{(M+1) \times 1} \\ D &= \{d_0, d_1, \dots, d_{N-1}\}^T = \{d_i\}_{N \times 1} \end{aligned}$$

拟合的 SISO 频响数据 L 个实测值被记为 $h_i = \text{Re } h_i + j \text{Im } h_i (i = 1 \sim L)$, 其中 $\text{Re } h_i$ 和 $\text{Im } h_i$ 分别为该值的实部和虚部。为了回避非线性方程组, 定义误差函数

$$E_i = W(s_i) B(s_i) [h_i - A(s_i)/B(s_i)] = W(s_i) [h_i B(s_i) - A(s_i)] \quad (4)$$

式(4)中的 $W(s)$ 为权函数, 引入它的目的是降低估计方差。很多文献简单地将其取为 1, 当干扰模型为白噪声时, 可以证明结果不是最小方差估计, 这如同 Levy 法, 若传递函数分母变化剧烈, 则其识别精度下降^[12]。最小方差所要求的权函数是 $1/B(s)$, 这样选择将面临求解非线性方程组的问题。如何确定权函数将在后面的仿真算例中进一步讨论。

所有 L 个拟合点误差平方总和 J 是正交多项式系数向量 C 和 D 的函数, 表示为

$$J(C, D) = \sum_{i=1}^L E_i E_i^* = E^T E^* \quad (5)$$

式中 $E = \{E_1, E_2, \dots, E_L\}^T$ 。于是误差向量可表示为

$$E = [W]([P]C - [Q]D - R) \quad (6)$$

式中 $[W] = [W]_{L \times L} = \text{diag}[W(s_1), W(s_2), \dots, W(s_L)]$, 是由 $W(s_i)$ 为对角元素构成的方阵

$$[P] = \begin{bmatrix} p_0(s_1) & p_1(s_1) & \dots & p_M(s_1) \\ p_0(s_2) & p_1(s_2) & \dots & p_M(s_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_0(s_L) & p_1(s_L) & \dots & p_M(s_L) \end{bmatrix} =$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} h_1 q_0(s_1) & h_1 q_1(s_1) & \dots & h_1 q_{N-1}(s_1) \\ h_2 q_0(s_2) & h_2 q_1(s_2) & \dots & h_2 q_{N-1}(s_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_L q_0(s_L) & h_L q_1(s_L) & \dots & h_L q_{N-1}(s_L) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} & [p_k(s_i)]_{L \times (M+1)} \\ & [h_i q_k(s_i)]_{L \times N} \\ R &= \{h_1 q_N(s_1), h_2 q_N(s_2), \dots, h_L q_N(s_L)\}^T = \\ & \{h_i q_N(s_i)\}_{L \times 1} \end{aligned}$$

误差函数 J 最小的必要条件为

$$\left. \begin{aligned} \partial J / \partial C &= 0 \\ \partial J / \partial D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

利用式(5)和(6), 可将式(7)整理为

$$\begin{bmatrix} Y & X \\ X^T & Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ G \end{Bmatrix} \quad (8)$$

式中:

$$[X] = -2 \text{Re}([P]^T [W] [W^*] [Q^*]) = [x_{k,l}]_{(M+1) \times (M+1)}$$

$$[Y] = [P]^T [W] [W^*] [P^*] + [P^*]^T [W] [W^*] [P]$$

$$[Z] = [Q]^T [W] [W^*] [Q^*] + [Q^*]^T [W] [W^*] [Q] = [z_{k,l}]_{N \times N}$$

$$F = 2 \text{Re}([P]^T [W] [W^*] R^*) = f_{k, M+1}$$

$$G = -2 \text{Re}([Q]^T [W] [W^*] R^*) = g_{k, N}$$

显然, 只要给定基函数系 $p_k(s), q_k(s)$ 和实测值 h_i , 就可以由式(8)解出正交多项式系数向量, 再变换成普通多项式幂项系数后, 就得到了式(1)的传递函数。

2 分子与分母基函数的选择

为了保证式(8)具有良好的数值性态, 必须挑选

合理的基函数 $p_k(s)$ 和 $q_k(s)$, 因为若简单选择 $q_k(s) = p_s(s) = s^k$, 就又与数值性能很差的 Levy 法相似。在误差函数权 $W(s) = 1$ 的特例下, Richardson 对分子和分母选择了 2 组不同的正交系, 使得式 (8) 中 Y, Z 均变成单位阵, 这种方法具有良好的数值效果, 已被广泛认可^[4~14]; 但是这种方法的分子正交多项式系与传递函数测试值有关, 对每个 SISO 的频响都要产生一个正交多项式系, 特别是下面要介绍的整体拟合步骤中还需要过渡 (变换) 矩阵, 这将显著增加计算量和存储量^[5,6,15,17]。为此, 对分子和分母选择相同的正交系, 仅使 Y 变为单位阵。这时式 (8) 变为

$$\begin{bmatrix} I & X \\ X^T & Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ G \end{Bmatrix} \quad (9)$$

进一步

$$\left. \begin{aligned} ([Z] - [X]^T [X] D) C &= G - [X]^T F \\ C &= F - [X] D \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

利用式 (10) 可求得 C 和 D 。 Y 为单位阵的条件可写为

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^L [p_k^*(s_i) p_l(s_i) + p_k(s_i) p_l^*(s_i)] |W(s_i)|^2 = \\ & \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (11) \end{aligned}$$

对于频响测量, s 只能在虚轴上, 即 $s = j\omega$ 。 $p_k(s)$ 可通过辅助实多项式系 $\mu_k(\omega)$ 表示为 $p_k(s) = j^k \mu_k(\omega)$, 而 $\mu_k(\omega)$ 可通过如下递推方式得到^[18]:

$$\left. \begin{aligned} \mu_0(\omega) &= 1 \\ \mu_1(\omega) &= \omega \\ \mu_k(\omega) &= \mu_{k-1}(\omega) + \mu_{k-1}(\omega) \mu_{k-2}(\omega) \quad k > 1 \\ \mu_k(\omega) &= \mu_k(\omega) / \sqrt{\mu_k} \quad k = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中: $\mu_k = \mu_k / \mu_{k-1}$, $\mu_k = 2 \sum_{i=1}^L | \mu_k(\omega_i) | W(\omega_i) |^2$ 。

注意: k 为奇数时, $\mu_k(\omega)$ 不含偶次方项, $p_k(s)$ 的幂项系数为纯虚数; k 为偶数时, $\mu_k(\omega)$ 无奇次方项, $p_k(s)$ 的幂项系数为实数。利用此性质可将计算量和存储量减少 50%。

采用上述的正交基函数后, $[X], F, [Z], G$ 可进一步简化为

$$\begin{aligned} x_{k,l} &= \begin{cases} -2\text{Re } S_{k,l} & k-l=4m \\ 2\text{Im } S_{k,l} & k-l=4m+1 \\ 2\text{Re } S_{k,l} & k-l=4m+2 \\ -2\text{Im } S_{k,l} & k-l=4m+3 \end{cases} \\ f_k &= \begin{cases} 2\text{Re } S_{k,l} & k-N=4m \\ -2\text{Im } S_{k,l} & k-N=4m+1 \\ -2\text{Re } S_{k,l} & k-N=4m+2 \\ 2\text{Im } S_{k,l} & k-N=4m+3 \end{cases} \\ z_{k,l} &= \begin{cases} 2T_{k,l} & k-l=4m \\ -2T_{k,l} & k-l=4m+2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ g_k &= \begin{cases} -2T_{k,N} & k-N=4m \\ 2T_{k,N} & k-N=4m+2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

其中: m, k, l 均为整数; $\text{Re } S_{k,l} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [\mu_k(\omega_i) \cdot \mu_l(\omega_i) \text{Re } h_i | W(s_i) |^2]$, $\text{Im } S_{k,l} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [\mu_k(\omega_i) \cdot \mu_l(\omega_i) \text{Im } h_i | W(s_i) |^2]$, $T_{k,l} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [\mu_k(\omega_i) \cdot \mu_l(\omega_i) | h W(s_i) |^2]$

3 整体拟合

若同一个结构在 K 个拾振点测得了频响函数, 那么对第 k 个拾振点的频响函数表示为

$$[U]_k D_k = V_k \quad (14)$$

式中: $[U]_k = [Z]_k - [X]_k^T [X]_k$, $V_k = F_k - [X]_k^T F_k$, 各符号的意义与式 (10) 的相同, 下标 k 对应不同的拾振点。对所有测点的频响, 可建立方程组

$$\left. \begin{aligned} [U]_1 D_1 &= V_1 \\ [U]_2 D_2 &= V_2 \\ \dots & \\ [U]_K D_K &= V_K \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

一个结构的模态阻尼和模态频率与测点位置无关, 因而不同拾振点拟合出来的有理形式传递函数的分母 D_k 至多相差一个比例系数。由于规定了 $d_N = 1$, 所以各测点 D_k 都应等于同一个 D , 这时式 (15) 提供了 $K \times N$ 个方程, 但 D 只有 N 个未知量, 因而式 (15) 是矛盾方程组, 采用最小二乘法求解的方程为

$$\begin{bmatrix} [U]_1^T \\ \dots \\ [U]_K^T \end{bmatrix} D = \sum_{k=1}^K [U]_k^T V_k \quad (16)$$

分子的正交多项式系数向量由式(17)给出

$$C_k = F_k - [X]_k^T D \quad (17)$$

在 Richardson 的文章中^[1-3], 分子的正交多项式系数随测振点而变化, 因而式(15)的 D_k 也随测振点而变化, 所以无法直接进行整体拟合; 为此 Richardson 在 D_k 与普通多项式幂项系数之间建立了转换矩阵 $[J]$, 通过 $[J]$ 把 D_k 变成普通多项式的幂项系数, 从而进行整体拟合。但是如果在与 Richardson 对应的式(16)的两边再左乘一个 $[J]^T$, 这在本质上又回到了普通 Levy 法, 然而后者数值性态很差。彭伟^[5,6]在 D_k 与 D_1 之间建立了变换矩阵, 最后整体拟合的未知数是 D_1 , 这在一定程度上改善了数值性态, 但它过分依赖于第一个测点的测量精度。由此可见, 若分子和分母选择同一个正交系, 这样就可以在整体拟合时不需要过渡矩阵, 更无须将 D_k 转换成普通多项式幂项系数。

当整体拟合之后, 从式(16)和(17)解出的正交多项式系数向量 D 和 C_k , 还需要转换为普通多项式系数向量 $A^k = \{a_0^k, a_1^k, a_2^k, \dots, a_M^k\}$ 和 $B = \{b_0, b_1, \dots, b_N\}$, 以便于求解模态参数, 右上角标 k 表示不同的测振点。两套系数之间的关系为

$$A^k = [J]^M C_k, B = [J]^N D$$

式中: $D = \{D^T, 1\}^T$, $[J]^M$ 和 $[J]^N$ 分别表示 M 阶和 N 阶转换矩阵, 分别为 $(M+1) \times (M+1)$ 和 $(N+1) \times (N+1)$ 的上三角阵, 上三角的元素为

$$i, k = \begin{cases} i_k & k - i = 4m \quad (m > 0) \\ -i_k & k - i = 4m + 2 \quad (m > 0) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

这里的 i_k 为辅助多项式 $k(\)$ 的 i 次幂项的系数。注意到, 即使在上三角中, 转换矩阵的元素仍几乎有一半为 0。

4 方法的考核与讨论

4.1 密集模态的识别

为了检验本文方法的有效性, 选择了文献[3]和[6]中的典型算例进行识别。所选择的模型是一个模态耦合较严重的三阶模型。用于生成频响函数的模态参数见表 1。仿真传递函数按式(18)计算。

表 1 仿真模型参数

Table 1 Parameters of the simulating model

序号	频率 f/Hz	阻尼比 $\zeta/\%$	留数				
			点 1	点 2	点 3	点 4	点 5
1	50	3.0	1.00	0.50	0	-0.50	-1.00
2	52	2.5	0	-0.25	-0.50	-0.75	-1.00
3	55	3.0	-1.00	-0.60	0.60	-0.30	-0.80

$$H_k(\omega) = \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{k_i}{\omega^2 + 2\zeta_i \omega + \omega_{n_i}^2}}{\quad} \quad (18)$$

式(18)并非真正意义上的频响仿真公式, 若采用文献[13]的公式仿真传递函数的第一列, 不可能识别出第二阶振型, 因为测点 1 为第二阶振型的节点。采用式(18)的时, 节点对识别结果的影响并没有真实体现出来。频率间隔 $f = 0.25 \text{ Hz}$ 。

表 2 示出采用本文方法与文献[3]方法的识别结果。可见, 采用本文方法的计算精度较文献[3]的高 2 个数量级。原因是除了方法因素外, 可能还与生成传递函数 f 的大小, 程序设计采用的语言(早期程序采用了混合编程, 不同模块之间有时通过文本文件方式传输数据), 以及所用变量长短有关, 而源于文献[17]所声称 Richardson 错误的的可能性不大。

表 2 本文方法与文献[3]方法对密集模态算例的识别结果

Table 2 Identified results of coupled model

序号	文献[3]方法				本文方法			
	f/Hz	$\zeta/\%$	$\zeta/\%$	$\zeta/\%$	f/Hz	$\zeta/\%$	$\zeta/\%$	$\zeta/\%$
1	49.96	0.080	0.029 3	2.33	50.000 0	*	0.030 00	2×10^{-4}
2	52.05	0.096	0.026 0	4.00	52.000 0	2×10^{-7}	0.025 00	2×10^{-5}
3	55.04	0.072	0.029 8	0.67	55.000 0	*	0.030 00	4×10^{-7}

注: f , ζ 分别表示频率和阻尼估计的相对误差。估计阻尼拟合区间为 40 ~ 65 Hz, 拟合模态为 3 个, 与文献[3]所采用的一致。

*表示对采用 4 字节浮点数, 识别值和仿真的原始值完全相同。

4.2 噪声干扰情形的识别

在上述频响函数上直接叠加均值为 0 的均匀分布随机数来模拟限带白噪声的干扰,白噪声的带限为 0~100 Hz,信噪比为 31.5 dB。表 3 和 4 示出采用 3 种不同权函数即估计 1,估计 2 和估计 3 的估计结果。3 种振型的误差见图 1。

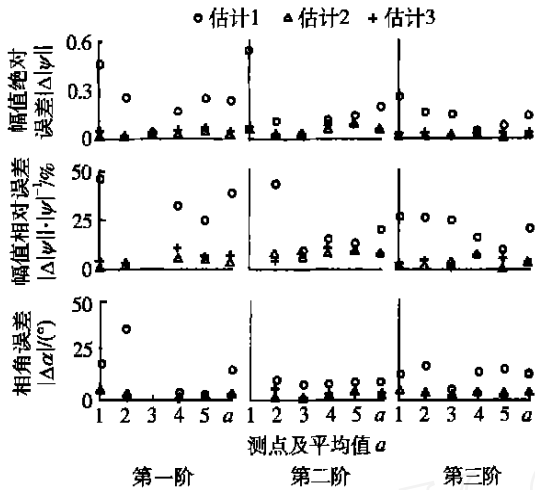


图 1 有噪声情形的振型识别误差

Fig. 1 The identified errors for model with noise

估计 1 的权函数 $W(s) = 1$; 估计 2 的 $|W(s)|$ 选择为测点 1 的虚部的绝对值,因为它的形状和趋势与 $1/|B(s)|$ 相接近;估计 3 的权函数通过反复迭代确定,即首先选择权函数 $W(s) = 1$,得到一个 $B(s)$ 估计,利用 $B(s)$ 估计出的 $1/|B(s)|$ 作为新的权函数,再次识别,如此迭代下去,一般经过 10 次左右迭代, $B(s)$ 就趋于一个稳定函数了;然后根据最后收敛的传递函数计算模态参数。

3 种估计对模态频率都具有较好的识别精度,估计 1 的误差低于 2%,估计 2 和 3 的误差低于 0.2%;但阻尼识别精度差异很大,不加权情形的估

表 3 不同权函数的频率识别结果

Table 3 The identified natural frequencies of different weight functions

模态 序号	估计 1		估计 2		估计 3	
	f/Hz	f/%	f/Hz	f/%	f/Hz	f/%
1	49.17	1.70	50.09	0.18	50.06	0.12
2	51.61	0.75	52.00	$< 10^{-7}$	52.00	$< 10^{-7}$
3	55.52	0.95	55.03	0.05	55.08	0.15

表 4 不同权函数的阻尼识别结果

Table 4 The identified damping factors of different weight functions

模态 序号	估计 1		估计 2		估计 3	
	/	%	/	%	/	%
1	0.0279	7.0	0.0297	1.0	0.0288	4.00
2	0.0224	10.4	0.0233	6.8	0.0234	6.40
3	0.0260	13.3	0.0306	2.0	0.0301	0.33

计 1 的误差高达 13.3%,估计 2 和 3 的误差小于 7%;留数识别的性能差异更大,估计 1 的幅值误差达 52%,相位误差一般为 10 左右,有的点高达 80%;而估计 2 和 3 则较为满意,幅值误差小于 12%,相位误差 5 左右。

从上述的分析结果看出,对于信噪比较低的情形,权函数值为 1 时的识别精度较低,而当选择权函数为测点 1 的虚部的绝对值时,即可显著改善精度,而且即使迭代,迭代次数对结果影响不明显。

5 结 论

1)修正的权函数的引入可降低估计的方差,减小计算工作量;

2)在 Richardson 正交多项式中,分子和分母采用相同的正交多项式基函数可使算法的复杂性和运算量显著下降。

本文中考核算例的模态阶数均已知,因而算法数值性态和识别精度都比较好,而实际问题中模态阶数如何确定,是一个重要的问题。如同 AR 谱估计,识别模态阶数很高情况,也必然出现模态分裂(识别阻尼比降低)的现象。是否可以采用递推方式逐渐增加识别模态阶数,以及递推停止的标准还需进一步研究。

参 考 文 献

[1] Richardson M H, Formenti D L. Parameter estimation from frequency response measurements using the rational fraction polynomial method [A]. In: D J DeMichele. Proc of 1st International Modal Analysis Conference [C]. Florida: Union College, 1982. 167~180

[2] Richardson M H, Formenti D L. Global curve fitting of frequency response measurements using the rational fraction polynomial method [A]. In: D J DeMichele. Proc of 3rd International Modal Analysis Conference [C]. Florida:

- Union College, 1985. 390 ~ 397
- [3] Richardson M H. Global frequency & damping estimates from frequency response measurements using the rational fraction polynomial method [A]. In: D J DeMichele. Proc of 4th International Modal Analysis Conference [C]. Florida: Union College, 1986. 465 ~ 470
- [4] Carrascoca L I, Busturia. Global Experiment modal analysis, a comparison of different methods [A]. In: D J DeMichele. Proc of 3rd International Modal Analysis Conference [C]. Florida: Union College, 1985. 311 ~ 317
- [5] 彭伟,袁景侠. 模态参数的整体正交多项式识别法[J]. 动态分析测试技术, 1988, (3): 1 ~ 9
- [6] 彭伟. 模态参数的整体识别及其软件的研制[D]. 大连:大连工学院, 1987
- [7] 周海亭,韩祖舜. 船用燃气轮机框架模型的模态参数识别[J]. 振动与冲击, 1995, 15(3): 7 ~ 12
- [8] 张燕飞,安春利,张胜勇. 复合材料柔性喷管试验模态分析[J]. 固体火箭技术, 1997, 20(4): 7 ~ 11
- [9] 崔广涛,彭新民,苑希民,等. 高拱坝卸洪振动水弹性模型[J]. 水利学报, 1996, (4): 1 ~ 9
- [10] 孙扬. 某涡喷发动机前轴承弹性支承试验模态分析[J]. 推进技术, 1999, 20(3): 61 ~ 63
- [11] 李耀明,邱白晶,陈进,等. 气吸振动式水稻播种试验台的振动分析[J]. 农业机械学报, 1998, 29(3): 41 ~ 47
- [12] 蒋国平,陈步达,周孔亢. 农用运输车联体后桥试验模态分析[J]. 农业机械学报, 2000, 31(5): 59 ~ 61
- [13] 李德葆,陆秋海. 实验模态分析及其应用[M]. 北京:科学技术出版社, 2001. 164 ~ 170
- [14] 傅志方. 振动模态分析与参数识别[M]. 北京:机械工业出版社, 1990. 144 ~ 152
- [15] 秦仙蓉,张令弥. 对模态参数识别的整体正交多项式算法的评述[J]. 强度与环境, 2000(4): 30 ~ 38
- [16] Miramand N. Identification of structural modal parameters by dynamic testing at a single point [J]. Shock and Vibration Bulltein, 1976(5): 46
- [17] 赵相公,徐燕申,彭泽民. 基于过渡矩阵的振动模态参数整体识别正交多项式算法[J]. 机械工程学报, 1999, 35(3): 78 ~ 80
- [18] Forsythe G E. Generation and use of orthogonal polynomials for data-fitting with a digital computer [J]. J Soc Indust Appl Math, 1957, 5(2): 54 ~ 88