

填隙幂律流体下圆球平行于平壁移动的近似解法

李红艳 黄文彬 徐 泳

(中国农业大学工程基础科学部)

摘 要 在雷诺润滑理论的基础上, 导出了存在填隙幂律流体时, 圆球平行于平壁移动时流体压力的近似方程, 导出了圆球所受阻力及阻力矩的积分式, 用数值解法求出阻力及阻力矩并给出了拟合表达式。可以证明, 当幂指数为 1 时, 由压力近似方程按渐近解法得到的解可退化到 Goldman 等的牛顿流体下的渐近解, 并表明本文中提出的数值解明显优于渐近解。

关键词 离散元法; 散体; 幂律流体

中图分类号 O 347. 7; O 373

An Approximate Solution on a Sphere Moving Parallel to a Plane of an Interstitial Power-Law Fluid

Li Hongyan, Huang Wenbin, Xu Yong

(College of Applied Engineering Sciences, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract The approximate pressure equation for a sphere moving parallel to a plane of an interstitial Power-Law fluid was derived according to Reynolds' lubrication theory. The approximate expression of the tangential viscous force and torque were obtained and the corresponding fitting expression was developed. Compared with Goldman's asymptotic solution for a Newtonian fluid, the presented numerical solution could be reduced to Goldman's result when the power index equals 1, and is more accurate.

Key words Distinct Element Method; agglomerate; Power-Law fluid

存在填隙牛顿或非牛顿流体时, 圆球颗粒与平面壁相互作用的力学模型有许多工程应用, 例如混凝土搅拌过程、湿土或水田的机械耕作过程和化工、食品、制药工业中的密相颗粒-流体混合过程。为此 Lian 等提出了存在填隙牛顿流体时的颗粒作用模型并进行了离散元数值仿真^[1,2], 本文作者已对存在填隙幂律流体时圆球颗粒间的法向作用进行了研究^[3], 对于圆球颗粒平行于平面壁移动的切向作用, 由于不能利用轴对称性, 至今仍是难题。目前可以参考的只有 Goldman^[4,5]对填隙牛顿流体情况下, 用奇异摄动法得到的渐近解, 但该结果在接触中心区域欠精确, 对幂律流体等非牛顿流体情况下的研究尚未见报道。

本文致力于完善幂律流体下的颗粒与平面壁的作用模型, 以便进行多相散体的离散元数值仿真。首先推导圆球平行于平面壁运动时压力分布的近似方程, 然后用数值方法得到圆球所受阻力以及阻力矩。

收稿日期: 2001-03-12

国家自然科学基金资助项目

李红艳, 北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区) 75 信箱, 100083

1 数学模型

考虑半径为 R 的刚性圆球 S , 以速度 V 沿 x 方向平行于平面 P 缓慢移动, 球壁间的最小间隙为 h_0 , 流体的外边界半径为 B (见图 1)。在 $r-\varphi-z$ 柱坐标系下流体定常流动的动量方程可

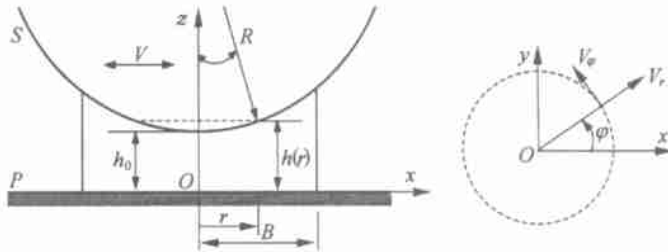


图 1 圆球平行于平面壁的运动

简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中对流项作为高阶小量已被略去, 并假定压力在 z 方向的梯度为 0。

假设流体不可压缩, 则连续性方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

其中: V_r, V_φ, V_z 是速度分量。

本文问题不具有轴对称性。对非牛顿流体, 通常假设本构关系只与应变率第二不变量 I_2 有关, 由于间隙处的流体速度场主要取决于 ϵ_z 和 $\epsilon_{\varphi z}$, 而其中 $\frac{\partial V_r}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}$ 又是主要的, 故

$$I_2 = \epsilon_z^2 + \epsilon_{\varphi z}^2 = \frac{1}{4} I \quad (3)$$

其中 $I = \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right)^2$; 因此幂律流体的本构方程写为

$$\mu = \mu(I) = K I^{(n-1)/2}$$

其中 K 是材料常数, n 是幂指数。

图示坐标系下间隙处的球面可近似为

$$z = h(r) = h_0 + \frac{r^2}{2R}$$

参照 Goldman^[4]在牛顿流体下的假设, V_r, V_φ, V_z 可表示为角度 φ 与 r, z 分离的形式

$$\left. \begin{aligned} V_r &= v_r(r, z) \cos \varphi \\ V_\varphi &= v_\varphi(r, z) \sin \varphi \\ V_z &= v_z(r, z) \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

此处的 v_r, v_{φ}, v_z 分别为 r 和 z 的待定函数, 它们满足边条件

$$\left. \begin{aligned} v_r = v_{r0} \quad v_z = 0 & \quad \text{当 } z = 0 \\ v_r = V, \quad v_{\varphi} = -V, \quad v_z = 0 & \quad \text{当 } z = h(r) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2 压力和切向阻力分析

2.1 压力分析

与 Goldman 对牛顿流体的研究方法类似, 本文中采用小参数法(摄动法)。设方程的解以及边界条件都可以表示为小参数 $\epsilon = h_0/R$ 的函数, 则各参量可以表示为

$$\left. \begin{aligned} v_r &= v_{r0} + \epsilon v_{r1} + \dots \\ v_{\varphi} &= v_{\varphi0} + \epsilon v_{\varphi1} + \dots \\ v_z &= v_{z0} + \epsilon v_{z1} + \dots \\ p &= p_0(r, z) \cos \varphi \\ p_0 &= \epsilon p_1 + \dots \\ I &= I_0 + \epsilon I_1 + \dots \\ \mu &= \mu_0 + \epsilon \mu_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将式(5)代入(3)略去小量后可得

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \left\{ \left(\frac{\partial v_{r0}}{\partial z} \right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{\partial v_{\varphi0}}{\partial z} \right)^2 \sin^2 \varphi \right\} \\ I_1 &= 2 \left\{ \frac{\partial v_{r0}}{\partial z} \frac{\partial v_{r1}}{\partial z} \cos^2 \varphi + \frac{\partial v_{\varphi0}}{\partial z} \frac{\partial v_{\varphi1}}{\partial z} \sin^2 \varphi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

又根据挤压流动的特点略去小项, 应力 $\sigma_{rz}, \sigma_{r\varphi}$ 可用小参数表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rz} &= \mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \quad \mu \frac{\partial v_r}{\partial z} = (\mu_0 + \epsilon \mu_1) \left(\frac{\partial v_{r0}}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial v_{r1}}{\partial z} \right) \cos \varphi \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_{\varphi}}{r} \right) \right] \quad \mu \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial z} = (\mu_0 + \epsilon \mu_1) \left(\frac{\partial v_{\varphi0}}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial v_{\varphi1}}{\partial z} \right) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将式(7)代入动量方程(1)并比较所得方程的两边, 有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu_0 \frac{\partial v_{r0}}{\partial z} \right\} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu_0 \frac{\partial v_{\varphi0}}{\partial z} \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu_0 \frac{\partial v_{r1}}{\partial z} + \mu_1 \frac{\partial v_{r0}}{\partial z} \right\} &= \frac{\partial p_1}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu_0 \frac{\partial v_{\varphi1}}{\partial z} + \mu_1 \frac{\partial v_{\varphi0}}{\partial z} \right\} &= -\frac{p_1}{r} \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

考虑到速度边条件式(4), 并假定 $\mu_0, \partial v_{r0}/\partial z$ 和 $\partial v_{\varphi0}/\partial z$ 都与 z 无关, 由式(8a)可得

$$\left. \begin{aligned} v_{r0} &= \frac{Vz}{h} \\ v_{\varphi0} &= -\frac{Vz}{h} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

为简化计算,进一步假定

$$\frac{\partial v_{r1}}{\partial z} = - \frac{\partial v_{\varphi 1}}{\partial z} \quad (10)$$

实际上此假定与前面对速度场所作的假定是一致的。将式(9)和(10)代入式(6)可得

$$I_0 = \left(\frac{V}{h} \right)^2, \quad I_1 = 2 \frac{V}{h} \frac{\partial v_{r1}}{\partial z}$$

由于 $v_{r0}, v_{\varphi 0}$ 已能满足速度边界条件,故 $v_{r1}, v_{\varphi 1}$ 只要满足零边界条件即可。根据式(8b)可以求得

$$\left. \begin{aligned} v_{r1} &= \frac{z(z-h)}{2} \frac{1}{n\mu_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} \\ v_{\varphi 1} &= \frac{z(h-z)}{2} \frac{1}{n\mu_0} \frac{p_0}{r} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将所求得的 $v_{r0}, v_{\varphi 0}, v_{r1}, v_{\varphi 1}$ 代入式(5),即得到速度场

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{Vz}{h} + \frac{z(z-h)}{2} \frac{1}{n\mu_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} \\ v_{\varphi} &= \frac{Vz}{h} - \frac{z(z-h)}{2} \frac{1}{n\mu_0} \frac{p_0}{r} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将式(12)代入连续性方程(2)并对 z 从 0 到 $h(r)$ 进行积分,最终得到压力方程

$$\frac{d^2 p_0}{dr^2} + \left(\frac{n+2}{h} \frac{r}{R} + \frac{1}{r} \right) \frac{dp_0}{dr} - \frac{p_0}{r^2} = - \frac{6nKV^n r}{h^{n+2} R} \quad (13)$$

此方程须数值求解。为将其量纲 1 化,引入下列因子

$$p^* = \frac{p_0 h_0^{n+1}}{12nKBV^n}, \quad \bar{r} = \frac{r}{B}, \quad c = \frac{B^2}{2h_0 R}, \quad \bar{h}(\bar{r}) = \frac{h(r)}{h_0} = 1 + c\bar{r}^2$$

则方程(13)变为量纲 1 压力方程

$$\frac{d^2 p^*}{d\bar{r}^2} + \left[2(n+2)c \frac{\bar{r}}{\bar{h}} + \frac{1}{\bar{r}} \right] \frac{dp^*}{d\bar{r}} - \frac{p^*}{\bar{r}^2} = - \frac{c\bar{r}}{\bar{h}^{n+2}} \quad (14)$$

当 $\bar{r} \rightarrow 0$ 时式(14)趋于方程

$$\frac{d^2 p^*}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{dp^*}{d\bar{r}} - \frac{p^*}{\bar{r}^2} = - c\bar{r}$$

其解为 $p^*(\bar{r}) = A_0 \bar{r} + A_1 / \bar{r} - c\bar{r}^3 / 8$, 解的中间项有奇异性,这和 $p^*(0)$ 有限相矛盾,故有 $A_1 = 0$ 和 $p^*(0) = 0$ 。在流体外边界 $r = B$ 上,即 $\bar{r} = 1$ 处,压力值等于大气压。

2.2 阻力和阻力矩的积分和拟合表达式

2.2.1 阻力和阻力矩

根据前面得到的 v_r, v_{φ}, p 的关系可以获得阻力的表达式。为了简化计算,设在接触区域内球心角 θ 较小,则球表面上点法向矢量 $\mathbf{n} = (\sin\theta, 0, -\cos\theta)$ ($r/R, 0, -1$),沿球面 $z = h(r)$ 上的微面元 $|ds| = r^2 \sin\theta d\varphi d\theta$ 上的力用张量的形式表示为

$$dF_i = \sigma_{ij} n_j |ds| = (-p\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}) n_j |ds| \quad (i, j = r, \varphi, z)$$

作此假定是为了简化计算,否则计算过程将复杂得多。在进一步研究中笔者放弃了这个假定,得出了更精确的解答(将另文发表)。比较结果表明,一般情况下近似解与精确解的差别不大,可以采用;这样在 DEM 模拟时可节省大量机时。

得到 dF_r, dF_φ 后, 即可积分求得圆球所受阻力

$$F_x = \int_0^B \int_0^{2\pi} (dF_r \cos \varphi - dF_\varphi \sin \varphi) dr d\varphi \quad (15)$$

为将阻力量纲 1 化, 令 $F_0 = 2ch_0^{1-n}KR V^n$, 则

$$f_x = - \frac{1}{\pi F_0} E_x = \int_0^1 \left(24ncp^* \bar{r}^2 + \frac{2\bar{r}}{h^n} + 6\bar{r}h \frac{\partial p^*}{\partial \bar{r}} + 6\bar{h}p^* \right) d\bar{r} \quad (16)$$

这就是量纲 1 阻力的积分表达式。可以看出, f_x 仅与幂指数 n 和参数 c 有关。 c 的引入使得球半径 R 、球-壁间距 h_0 以及流体边界 B 化为一个变量, 简化了依赖变量的关系。

与阻力的求解类似, 取圆球的球心为坐标原点, 可以求得圆球所受的阻力矩

$$M_y = \int_0^B \int_0^{2\pi} (z dF_x - x dF_z) dr d\varphi \quad (17)$$

令 $M_0 = F_0 R$, 得其量纲 1 形式

$$m_y = \frac{1}{\pi M_0} M_y = \int_0^1 \left(\frac{2\bar{r}}{h^n} + 6\bar{h}\bar{r} \frac{\partial p^*}{\partial \bar{r}} + 6\bar{h}p^* \right) d\bar{r} \quad (18)$$

2.2.2 数值解及其拟合结果

对式(16), (18)运用辛普生公式积分即可得到数值解, 为了便于离散元数值仿真, 作者根据数值解结果及其曲线的特征进行了拟合, 其拟合公式分别为

$$f_x(n, c) = \exp [A_0(n) + A_1(n)/c + A_2(n) \lg(c)] \quad (19)$$

和

$$m_y(n, c) = \exp [B_0(n) + B_1(n)/c + B_2(n) \lg(c)] \quad (20)$$

其中 $A_0(n), A_1(n), A_2(n)$ 和 $B_0(n), B_1(n), B_2(n)$ 是关于 n 的四次多项式

$$\left. \begin{aligned} A_i(n) &= a_0 + a_1n + a_2n^2 + a_3n^3 + a_4n^4 \\ B_i(n) &= a_0 + a_1n + a_2n^2 + a_3n^3 + a_4n^4 \end{aligned} \right\} \quad (i= 0, 1, 2)$$

式中 $a_i (i= 0, 1, 2, 3, 4)$ 是拟合系数, 参看表 1。

表 1 $f_x(n, c)$ 和 $m_y(n, c)$ 的拟合系数

函 数	n 的函数	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
$f_x(n, c)$	$A_0(n)$	- 0.746 5	3.039 1	- 0.323 8	- 1.265 5	0.414 5
	$A_1(n)$	6.005 9	- 24.063 8	13.185 0	0.896 2	- 1.240 8
	$A_2(n)$	- 0.028 1	- 2.143 7	- 0.566 2	1.139 3	- 0.307 1
$m_y(n, c)$	$B_0(n)$	- 0.733 4	0.553 3	3.944 5	- 4.516 5	1.283 6
	$B_1(n)$	6.039 7	- 1.549 8	- 30.108 7	32.740 9	- 9.486 6
	$B_2(n)$	- 0.039 4	- 2.051 1	- 1.563 0	2.258 6	- 0.644 9

为了检查拟合精度, 将球平行于平面壁运动量纲 1 阻力 f_x 的数值解与由拟合公式(18)得到的结果进行了比较, 结果见图 2(a)。可以看出拟合公式(19)的计算精度是相当高的, 在 c 5 000 范围内与数值解的相对偏差最大不超过 5%, 因此在用离散元方法进行数值模拟时可直接用此公式。

量纲 1 阻力矩 m_y 的数值解与由拟合公式(20)得到的结果见图 2(b), 此拟合公式的精度

也是非常高的,当 c 达到 10 000 时亦即球离平面壁非常近的情况下,拟合结果与数值解的最大偏差不超过 5%。

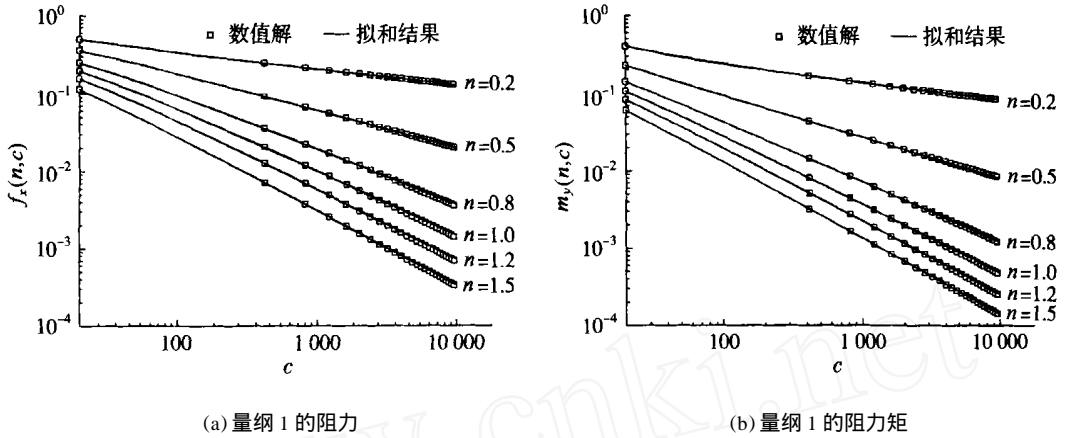


图2 数值解与拟合结果的比较

3 数值比较和讨论

3.1 压力分布的比较

为便于比较,还需要用渐近解法求出压力分布。当 c 非常大时,有 $\bar{h}(\bar{r}) = 1 + c\bar{r}^2 - c\bar{r}^2$,这时式(14)变成

$$\frac{d^2 p^*}{d\bar{r}^2} + \frac{2n+5}{\bar{r}} \frac{dp^*}{d\bar{r}} - \frac{p^*}{\bar{r}^2} = -\frac{1}{c^{n+1}} \frac{1}{\bar{r}^{2n+3}}$$

求解此方程可得量纲 1 压力为

$$p^*(\bar{r}) = \frac{1}{2(3n+2)c^{n+1}} \frac{1}{\bar{r}^{2n+1}} \tag{21}$$

当 $n=1$ 时式(21)能退回到 Goldman 在牛顿流体下的情形,证明前述的推导是可信的。

在参数 c 分别取 20 和 200 的情况下,幂指数分别为 $n=0.5, 1.0, 1.5$ 时, $p^*(\bar{r})$ 值随 r 变化时压力分布的数值解与渐近解分别见图 3(a)和(b)。由图可见渐近解在 r 趋于 0 时,压力趋于无穷,明显不合理;而在相同情况下,数值解却不存在奇异性,反映出合理的流体压力分布。

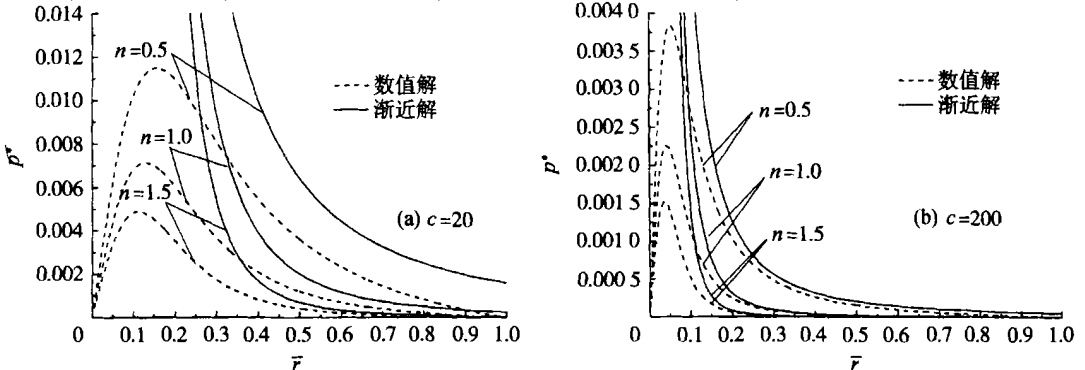


图3 量纲 1 压力 p^* 分布: 数值解与渐近解的比较

由定义 $c = B^2 / (2h_0R)$, 在 B, R 皆为定值时, 间隙越小, 数值解与渐近解在 $r > 0$ 的区域越接近, 且都向接触中心区集中。接触中心区的压力是构成切向阻力的主要部分, 而接触中心区外的周围区域对切向阻力的贡献甚小, 意味着液桥和浸渍两种情形差别甚小, 所以尽管对两种情形未进行明确区分, 对通常的参数 c 较大的情况, 雷诺润滑理论仍然适用。

3.2 阻力和阻力矩的比较

为了比较阻力和阻力矩的数值解与渐近解, 须先求出渐近解。将压力分布的渐近解式 (21) 分别代入式 (16) 和 (18), 即可得到 f_x 和 m_y 的积分表达式

$$f_x = \frac{12n+4}{3n+2} \frac{1}{c^n} \int_0^1 r^{-2n+1} dr, \quad m_y = \frac{4}{3n+2} \frac{1}{c^n} \int_0^1 r^{-2n+1} dr \quad (22)$$

此式可直接进行积分得

$$f_x = \begin{cases} \frac{2(3n+1)}{(3n+2)(1-n)c^n} & \text{当 } n < 1 \\ \frac{16}{5c} \ln \frac{1}{r_0} & \text{当 } n = 1 \\ \frac{2(3n+1)(1-\frac{2}{r_0} 2^n)}{(3n+2)(1-n)c^n} & \text{当 } n > 1 \end{cases}, \quad m_y = \begin{cases} \frac{2}{(3n+2)(1-n)c^n} & \text{当 } n < 1 \\ \frac{4}{5c} \ln \frac{1}{r_0} & \text{当 } n = 1 \\ \frac{2(1-\frac{2}{r_0} 2^n)}{(3n+2)(1-n)c^n} & \text{当 } n > 1 \end{cases} \quad (23)$$

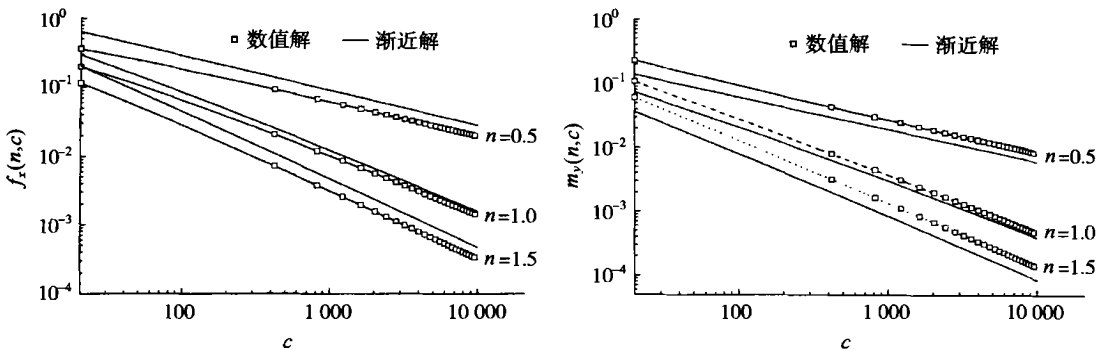
当 $n = 1$ 时取流体边界 $B = R, \bar{r}_0 = \sqrt{h_0R/B}$, 则 $\ln \bar{r}_0 = \ln(h_0/R)/2$, 因此对于牛顿流体的情况

$$F_x = - \pi f_x F_0 = \frac{16\pi K V R}{5} \ln \frac{h_0}{R} \quad (24)$$

$$M_y = \pi m_y M_0 = - \frac{4\pi K R^2 V}{5} \ln \frac{h_0}{R} \quad (25)$$

此即 Goldman 对牛顿流体得到的渐近解。

量纲 1 阻力 f_x 和量纲 1 阻力矩 m_y 的数值解与渐近解的比较分别见图 4(a) 和 (b)。可以看出, m_y 的规律与 f_x 的规律非常类似, 幂律指数 n 偏离 1 越大, 两种结果的差别越大。不同的是, 量纲 1 阻力 f_x 的数值解较渐近解偏小, 而量纲 1 阻力矩 m_y 数值解较渐近解偏大。



(a) 量纲 1 的阻力 f_x

(b) 量纲 1 的阻力矩 m_y

图 4 数值解与渐近解的比较

4 结 论

由于问题的复杂性, Goldman 等人只对牛顿流体的情况作了分析, 并且在求解过程中作了较多的近似。本文中在 Reynolds 润滑理论的基础上, 将流体模型推广到非牛顿流体的情况, 并给出了渐近解。研究表明, 当 $n=1$ 时可以退化到 Goldman 等人在牛顿流体情况下得到的结果, 另外还给出了问题的数值解, 并给出了精度较高的拟合公式。通过比较发现数值解比渐近解合理, 这是因为在切向力作用的敏感区域中心存在奇异, 而渐近结果恰恰在接触区域的中心不够精确。

参 考 文 献

- 1 Lian G, Thornton C, Adams M J. Discrete particle simulation of agglomerate impact coalescence. *Chemical Engineering Science*, 1998, 53(19): 3381~ 3391
- 2 Lian G, Thornton C, Adams, M J. A theoretical study of liquid bridge forces between two rigid spherical bodies. *J Colloid Interface Sci*, 1993, 161: 138~ 147
- 3 徐 泳, 黄文彬, 李红艳. 圆球颗粒间有幂律流体时挤压流动的法向粘性力. *农业工程学报*, 2002, 18(2): 1~ 4
- 4 Goldman A J, Cox R G, Brenner H. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall- I Motion through a quiescent fluid. *Chemical Engineering Science*, 1967a, 22: 637~ 651
- 5 Goldman A J, Cox R G, Brenner H. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall- II Couette flow. *Chemical Engineering Science*, 1967b, 22: 653~ 660