

## 基于对数应变的有限变形弹塑性一致性算法

刘学军 李明瑞

(中国农业大学工程基础科学部)

**摘要** 提出了与基于对数应变的精确有限变形弹塑性理论相应的一致性算法。该算法的计算结果相对于真实解具有一阶精度,且能够给出精确的应力更新公式、精确的弹塑性模量和平衡方程。最后用算例验证了此理论的正确性和算法的有效性。

**关键词** 有限元; 有限变形; 弹塑性; 一致性算法; 对数应变

**中图分类号** O 344.1; O 344.3

## Finite Deformation Elasto-Plastic Theory Based on Logarithmic Strain and Consistent Algorithm

Liu Xuejun Li Mingrui

(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

**Abstract** According to the accurate finite deformation theory based on the logarithmic strain given in part (I), a consistent algorithm with first-order accuracy is developed. The accurate stress update formation, accurate elasto-plastic moduli and accurate equilibrium equation are derived. Finally, a few numerical examples are given to demonstrate the validity of the theory and efficiency of the algorithm.

**Key words** finite element; finite deformation; elasto-plasticity; consistent algorithm; logarithmic strain

笔者在文献[1]中提出了基于对数应变的精确的有限变形弹塑性理论,本文中提出与该理论相应的一致性算法。在弹塑性问题的计算中,一般而言,其结果与加载路径有关,不同的加载步长和不同的计算方法将会导致不同的计算结果,因而,一般情况下,计算结果是不精确的。由此引出一个问题,这种近似如何来度量呢?对于一般的弹塑性算法,人们无法估计出其近似的程度。当加载步长 $\Delta p$ 趋近于0时,正确的计算方法的结果应收敛于精确值;但对于实际采用的加载步长而言,其与精确值的近似程度则不得而知,甚至可能飘离精确解甚远。本文中提出的一致性弹塑性算法能够很好地解决这一难题(图1)。此算法总的思想是:既然明知道

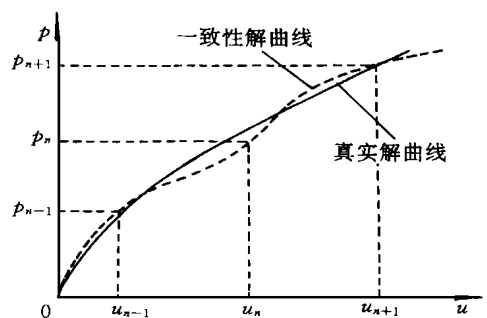


图1 一致性解曲线与精确解的示意图

收稿日期: 2000-03-06

国家自然科学基金资助项目

刘学军,北京清华东路17号 中国农业大学(东校区)213信箱,100083

一般弹塑性问题的精确解无法求得, 那么就避开它, 去寻找一条相对容易求得的曲线路径。若又知道此曲线路径与真实解曲线路径的确切误差范围, 那么就可以通过求解该曲线路径来近似求解真实的变形路径。

### 1 有限变形弹塑性一致性算法

因为有限变形弹塑性的一致性算法与小变形的弹塑性一致性算法有相似之处, 故在此首先简单介绍小变形弹塑性一致性算法, 之后与之对应地导入有限变形弹塑性一致性算法。

#### 1.1 小变形弹塑性一致性算法

一般的弹塑性应力张量更新公式可表示为

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma$$

$$\Delta\sigma = \int_{\epsilon_n}^{\epsilon_{n+1}} D_{e,p} d\epsilon \quad (1)$$

其中

式中:  $D_{e,p}$  为弹塑性模量,  $\epsilon$  为应变张量。对于式(1), 一般是无法给出精确解的, 于是发展了各种近似方法, 但都无法得知其近似解与真实解的近似程度。本文中采用的一致性积分算法能够求得这种解的近似程度, 即具有一阶近似性。

一致性算法的一阶精度特点, 主要体现在对塑性应变的积分上, 而塑性应变积分的核心是对  $d\epsilon_{p,ij}$  的积分,  $\epsilon_{p,ij}$  为塑性应变张量分量。对  $d\epsilon_{p,ij}$  的精确积分, 人们同样是无法得到的, 故本文中采用广义中点法则对此积分进行具有一阶精度的近似计算。

应用文献[1]中小变形弹塑性理论可得

$$d\epsilon_{p,ij} = d\lambda(\partial\varphi/\partial\sigma_{ij}) = [3/(2s)] d\lambda \cdot S_{ij} \quad (2)$$

式中:  $\varphi$  为 Mises 屈服函数,  $s$  为等效应力,  $S_{ij}$  为移位应力张量偏量。为简化起见, 将  $d\lambda$  简记为  $\lambda$ 。由此, 式(2)变为

$$d\epsilon_{p,ij} = [3/(2s)] \lambda S_{ij} \quad (3)$$

假设第  $n$  次加载所得塑性应变张量分量  $\epsilon_{p,ij}$ , 塑性应变球量  $e_p$  和 back 应力张量  $B$  的收敛值  $\epsilon_{p,ij,n}$ ,  $e_{p,n}$ ,  $B_n$  及本次加载所得位移向量  $u_{n+1}$  (即总应变  $\epsilon_{j,n+1}$ ) 为已知, 应用广义中点法则对式(3)进行积分后得

$$\epsilon_{p,ij,n+1} = \epsilon_{p,ij,n} + [3/(2s)] \lambda S_{ij,n+\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

形成  $S_{n+\alpha}$  所用到的张量有

$$\epsilon_{p,n+\alpha} = \alpha\epsilon_{p,n+1} + (1-\alpha)\epsilon_{p,n}, \quad \epsilon_{n+\alpha} = \alpha\epsilon_{n+1} + (1-\alpha)\epsilon_n,$$

$$B_{n+\alpha} = \alpha B_{n+1} + (1-\alpha)B_n, \quad \sigma_{n+\alpha} = \alpha\sigma_{n+1} + (1-\alpha)\sigma_n, \quad \sigma_{n+\alpha} = D(\epsilon_{n+\alpha} - \epsilon_{p,n+\alpha})$$

其中  $\alpha$  为参数。由广义积分法性质可知, 当  $\alpha = 1/2$  时积分算法无条件稳定; 当  $\alpha \neq 1/2$  时, 积分具有二阶精度; 否则, 积分具有一阶精度。为计算简便, 选用  $\alpha = 1$ , 由此形成了具有一阶精度且无条件稳定的积分算法。即

$$\epsilon_{p,ij,n+1} = \epsilon_{p,ij,n} + [3/(2s)] \lambda S_{ij,n+1} \quad (4)$$

由此得出替代精确的率型基本方程组的具有一阶精度的基本方程组

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{j,n+1} &= \epsilon_{j,n+1} + \epsilon_{p,ij,n+1} \\ \sigma_{ij,n+1} &= D_{ijkl} \epsilon_{k,l,n+1} \\ B_{ij,n+1} &= B_{ij,n} + (H/s_{n+1}) \lambda S_{ij,n+1} \\ \epsilon_{p,ij,n+1} &= \epsilon_{p,ij,n} + [3/(2s_{n+1})] \lambda S_{ij,n+1} \\ e_{p,n+1} &= e_{p,n} + \lambda \\ \varphi_{n+1} = s_{n+1} - k_{n+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中  $H$  为动力硬化系数。可以认为式(5)是相对精确解的一阶近似解曲线的表达式。再加上确定  $S_{ij}, B_{ij}$  的方程和一致性条件  $dQ = 0$ , 可得出相对于此近似解曲线的一致切线模量  $D_{e,p}$  的精确表达式。由应力及一致切线模量的精确表达式, 可以导出平衡方程的精确表达式; 由精确的平衡方程式, 可以很容易地推导出牛顿迭代格式中切线刚度矩阵  $K_T$  的精确表达式。由此可得出的一套具有一阶精度的、近似的弹塑性小变形的一致性算法。依据一致性算法可得实际计算时所用的一套弹性预测-塑性纠正的算法。弹性预测应力张量分量

$$\sigma_{e, tr, ij, n+1} = D_{ijkl} (\epsilon_{kl, n+1} - \phi_{kl, n})$$

塑性纠正应力张量分量

$$\phi_{ij, n+1} = - \lambda D_{ijkl} (\partial \mathcal{P}_{n+1} / \partial \sigma_{kl})$$

$$\sigma_{ij, n+1} = \sigma_{e, tr, ij, n+1} + \phi_{ij, n+1} \tag{6}$$

注意到式(6)不同于传统的应力更新近似公式  $\sigma_{ij, n+1} = \sigma_{ij, n} + \Delta \sigma_{ij}$ , 而是精确的应力更新公式。为使推导过程及计算简化, 将式(6)加以改造。由于应力及应变的对称性, 可以将其改造为

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}]^T \\ S &= [S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{31}]^T \\ B &= [B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{12}, B_{23}, B_{31}]^T \\ \epsilon &= [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{31}]^T \\ \phi &= [\phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}, 2\phi_{12}, 2\phi_{23}, 2\phi_{31}]^T \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

这样, 就可以应用文献[2]中的推导方法来加以求解, 最终求得弹塑性模量  $D_{e,p}$ , 使得

$$d\sigma_{n+1} = D_{e,p} d\epsilon_{n+1}$$

成立。其中

$$D_{e,p} = \Psi(\lambda) \cdot (N_{n+1} \otimes N_{n+1}) / (1 + \zeta_{n+1})$$

式中

$$N_{n+1} = \frac{\Psi(\lambda) P \eta_{n+1}}{(\eta_{n+1}^T P \Psi(\lambda) Z \eta_{n+1})^{1/2}} \quad \zeta_{n+1} = (H \gamma + k_{n+1} \gamma^2) / \left( \frac{3}{2s_{n+1}} \eta_{n+1}^T Z \Psi(\lambda) \frac{3}{2s_{n+1}} Z \eta_{n+1} \right)$$

且

$$\eta_{n+1} = \left[ 1 / \left( 1 + \lambda \frac{H}{s_{n+1}} \right) \right] \Psi(\lambda) (\epsilon_{n+1} - \phi_{n+1} - D^{-1} B_n) \quad \gamma = 1 + \lambda (H / s_{n+1})$$

其中

$$\Psi(\lambda) = \left[ D^{-1} + \frac{\lambda [3 / (2s_{n+1})] Z}{1 + \lambda (H / s_{n+1})} \right]^{-1} \quad B = Z^{-1} B$$

其中

$$Z = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

系数  $\lambda$  是在求  $t_{n+1}$  时刻的一致性条件  $dQ_{n+1} = 0$  时采用牛顿迭代法求出的。

### 1.2 有限变形弹塑性一致性算法

该算法的核心问题是如何对塑性变形速度梯度张量  $L_p = \dot{F}_p F_p^{-1}$  进行积分。同小变形一样, 人们无法求出它的精确形式。为了能够求得一个与已知精确解误差为一阶的近似解, 仍采用广义中点法则对其进行积分。为表达方便, 首先假设在  $t_n$  时刻的基本变量值  $F_{p,n}, B_n, e_{p,n}$ , 以及  $t_{n+1}$  时刻的位移  $u_{n+1}$  为已知, 最终求得与精确解误差为一阶的  $F_{p,n+1}, F_{p,n+1} = (\exp \Delta E_{p,n+1}) \cdot F_{p,n}$  其中  $\Delta E_p$  为塑性对数应变张量增量,  $\Delta E_{p,n+1} = \lambda N_{n+1}, N$  为屈服面外法向单位向量<sup>[1]</sup>。由于  $F_{p,n+1}$  求出, 与之相应的  $F_{e,n+1} = F_{n+1} \cdot F_{p,n+1}^{-1}, u_{e,n+1} = F_{e,n+1}^T \cdot F_{e,n+1}, E_{e,n+1} = \ln u_{e,n+1}$  及与之共轭的旋转 Kirchhoff 应力  $T = H \quad E_{e,n+1}$  都可以在此基础上精确求出; 并可得到精确的一致性弹塑性模量及精确的平衡方程。由于平衡方程的表达式是精确的, 从而可以得到切线刚度矩阵的精确表达式。由此得出一套有限变形弹塑性一致性算法, 即基于有限变形梯度的积分解  $F = F_e F_p$  的弹性预测-塑性纠正算法。

设在  $t_n$  时刻的基本变量值  $F_{p,n}, B_n, e_{p,n}$ , 以及  $t_{n+1}$  时刻的位移  $u_{n+1}$  为已知, 弹性预测-塑性纠正算法的具体实现步骤如下。

1) 求出  $F_{n+1}$ ;

2) 求出弹性变形梯度张量预测值  $F_{e, tr, n+1} = F_{n+1} F_{p,n}^{-1}$ , 从而得到 Cauchy-Green 张量  $C_{e, tr, n+1} = F_{e, tr, n+1}^T F_{e, tr, n+1}$ ;

3) 求出位移张量的预测值  $u_{e, tr, n+1} = C_{e, tr, n+1}^{1/2}$ ;

4) 求出转动张量预测值  $R_{e, tr, n+1} = F_{e, tr, n+1} u_{e, tr, n+1}^{-1}$ ;

5) 由此求出弹性对数应变张量预测值  $E_{e, tr, n+1} = \ln u_{e, tr, n+1}$ ;

6) 构造弹性试探应力张量 (即预测值)  $T_{e, tr, n+1} = H \quad E_{e, tr, n+1}$ ;

7) 检查屈服条件是否满足  $\Phi_{tr} = [3 J_2 (T_{e, tr, n+1} - B_n)]^{1/2} - k(e_p) = 0$ ;

8) 如果满足此条件, 则令其他一切变量  $(\bullet)_{n+1} = (\bullet)_{tr, n+1}$ , 否则转至 9);

9) 由以下式 (a), (b) 和 (c) 经过牛顿迭代即可求出  $T_{n+1}, B_{n+1}$  和  $\lambda$

$$\Phi_{tr} = [3 J_2 (T_{n+1} - B_n)]^{1/2} - k(e_p + \lambda) = 0 \tag{a}$$

$$T_{n+1} = H \quad (E_{e, tr, n+1} - \lambda N_{n+1}) \tag{b}$$

其中  $N_{n+1} = (3/2)^{1/2} N_{n+1}$ , 由文献[1]中公式  $N = \frac{\partial \Phi / \partial T}{|\partial \Phi / \partial T|} = \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{S}{J_S}$  给定。对文献[1]中式 (24) 积分得到

$$B_{n+1} = B_n + (2/3) H \lambda N_{n+1} \tag{c}$$

10) 由文献[1]中式 (23) 求出塑性对数应变张量增量  $\Delta E_{p,n+1} = \lambda N_{n+1}$ ;

11) 更新等效塑性应变  $e_{p,n+1} = e_{p,n} + \lambda$ ;

12) 更新塑性应变张量  $E_{p,n+1} = E_{p,n} + \Delta E_{p,n+1}$ ;

13) 更新弹性应变张量  $E_{e,n+1} = E_{e, tr, n+1} - \Delta E_{p,n+1}$ ;

14) 更新位移张量  $u_{e,n+1} = \exp E_{e,n+1}$ ;

至此, 完成全部变量更新。

### 2 平衡方程及一致性切线刚度矩阵

牛顿迭代法是求解非线性问题非常有效的方法, 应用此迭代法, 须列出平衡方程并求出相

应的一致性切线刚度矩阵的精确表达式。在这里,首先推导出基于初始构形上的相应迭代矩阵。因为第1类 Piola-Kirchhoff 应力张量  $P$  与位移梯度  $\partial u/\partial x$  在能量上共轭,故选择此配对来列平衡方程。

内力虚功:  $\delta W_{i} = \int_{V_0} P \delta(\partial u/\partial x) dV_0$ , 其中  $\delta(\partial u/\partial x) = G \delta q$ ,  $G$  为几何矩阵,其值取决于有限元法中的插值函数,与变形无关;  $q$  为节点位移向量。外力虚功:  $\delta W_{ex} = Q \delta q$ , 其中  $Q$  为等效节点力向量。由  $\delta W_{i} = \delta W_{ex}$  可推得平衡方程式

$$\Psi(q) = \int_{V_0} G^T P dV_0 - Q = 0 \tag{8}$$

由推导过程可知式(8)是精确的。下面,推导有限变形情况下弹塑性一致性切线刚度矩阵的精确表达式。

因为  $\Delta \Psi(q) = \int_{V_0} G^T (\partial P/\partial q) dV_0 \Delta q = K_T \Delta q$ , 其中  $\partial P/\partial q = (\partial P/\partial F) (\partial F/\partial q) = (\partial P/\partial F) G$ , 故  $K_T = \int_{V_0} G^T (\partial P/\partial F) G dV_0$ 。由于推导过程没有涉及本构问题,故是普遍适用的。对于  $\partial P/\partial F$ , 文献[3]中已有阐述,这里只将结果列出。

设  $D = \partial P/\partial F$ , 经过张量求导并整理后得到其分量形式:

$$D_{ijkl} = \partial P_{ij}/\partial F_{kl} = \delta_{ik} (F_{p,n}^{-1} u_{e, tr, n+1}^{-1})_{la} T_{n+1, ab} (F_{p,n}^{-1} u_{e, tr, n+1}^{-1})_{jb} + (A_{ijcd} + K_{ijef} M_{efcd}) N_{cdkl}$$

其中:  $A_{ijcd} = (R_{e, tr, n+1})_{ie} (F_{p,n}^{-1} u_{e, tr, n+1}^{-1})_{jf} D_{e,p, ef} L_{gscd}$ ,  $(D_{e,p})_{efgs}$  为小变形一致性弹塑性切线模量  $D_{e,p}$  的分量,  $D_{e,p} = \partial T_{n+1}/\partial e_{e, tr, n+1}$ ,  $L_{gscd}$  为张量  $L = \partial e_{e, tr, n+1}/\partial C_{e, tr, n+1}$  的分量;  $K_{ijef} = F_{e, tr, n+1, ie} T_{n+1, fg} (F_{p,n}^{-1} u_{e, tr, n+1}^{-1})_{jg} + R_{e, tr, n+1, is} T_{n+1, sf} F_{p,n}^{-1, je}$ ;  $M_{efcd}$  是张量  $M = \partial u_{e, tr, n+1}^{-1}/\partial C_{e, tr, n+1}$  的分量。

因篇幅有限,推导中所涉及的张量求导等运算及相关性内容将在另文中作进一步阐述。

### 3 算例分析

首先假定硬化函数具有如下形式:  $k = k(e_p) = (c - \sigma_0) [1 - \exp(-\zeta e_p)] + c_1 e_p + \sigma_0 = k(e_p) + \sigma_0$  式中:  $\sigma_0$  为初始屈服应力,  $c$  为非线性屈服常数,  $c_1$  为线性屈服常数,  $\zeta$  为调节系数,  $k(e_p)$  为等向硬化函数。给出一个单向拉伸且带有线性强化的有限变形弹塑性的解析解表达式,将算例计算结果与其比较,来验证本算法的近似程度。

**算例1 简单拉伸问题** 取1根金属杆,假设沿第3方向(杆长方向)拉伸。设杆长  $l$ , 位移为  $u$ ; 取  $k = (u/l) + 1$ , 则  $\ln k$  为第3方向的对数应变; 取  $T$  为此方向的旋转 Kirchhoff 应力张量分量, 故  $T_{11} = T_{22} = T_{33} = T_{12} = T_{23} = T_{31} = 0$ ,  $M_{ises}$  屈服函数  $\Phi = [(3/2) T_{ij} T_{ij}]^{1/2} - k = 0$ , 其中  $T$  为旋转 Kirchhoff 应力张量偏量,  $T_{11} = - (1/3) T$ ,  $T_{22} = - (1/3) T$ ,  $T_{33} = (2/3) T$ ,  $T_{12} = T_{23} = T_{31} = 0$ 。取  $k = \sigma_0 + a e_p$ , 式中:  $a$  为线性强化系数,  $e_p$  为等效塑性应变。由此,可得

$$\Phi = T - \sigma_0 - a e_p = 0 \tag{9}$$

由文献[1]中式(23)可得拉伸方向的塑性应变率

$$\rho_p = \dot{\lambda}_p / \lambda_p = (\ln \lambda_p) (\partial \Phi / \partial T) \dot{\beta} = \dot{\beta}$$

进入塑性区后,泊松比  $\nu = 0.5$ , 由此,另2个方向的塑性应变率

$$\rho_{p11} = \rho_{p22} = - 0.5 \rho_p$$

由此可得等效塑性应变率

$$\dot{\epsilon}_p = [(2/3) \rho_{p,ij} \rho_{p,ij}]^{1/2} = [(2/3) (\rho_{p11} \rho_{p11} + \rho_{p22} \rho_{p22} + \rho_p \rho_p)]^{1/2} = \dot{\beta}$$

由变形梯度积分解可知,  $\kappa \kappa_p = \kappa$ , 则

$$\dot{\kappa} = (\dot{\kappa} \kappa_p) = \dot{\kappa}_c \kappa_p + \kappa \dot{\kappa}_p$$

两边同时除以  $\kappa$ , 经整理后得

$$(\ln \dot{\kappa}) = (\ln \dot{\kappa}_c) + (\ln \dot{\kappa}_p)$$

因为,  $T = E \ln \kappa$ , 故

$$\dot{T} = E (\ln \dot{\kappa}) = E [(\ln \dot{\kappa}) - (\ln \dot{\kappa}_p)] = E [(\ln \dot{\kappa}) - \dot{\beta}] \tag{10}$$

其中  $E$  为弹性模量。对式(9)求导可得一致性条件

$$\dot{T} - c_l \dot{\epsilon}_p = \dot{T} - c_l \dot{\beta} = 0 \tag{11}$$

将式(10), (11)联立方程组可得

$$\dot{T} = [E c_l / (E + c_l)] (\ln \dot{\kappa}) \tag{12}$$

对式(12)进行积分得到

$$T = \sigma_0 + [E c_l / (E + c_l)] (\ln \kappa - \epsilon_0)$$

其中  $\epsilon_0$  为与  $\sigma_0$  相对应的应变,  $\epsilon_0 = \sigma_0 / E$ 。表 1 示出杆件在进入塑性变形区后其旋转 Kirchhoff 应力  $T$  的精确的解析解与利用本理论得出的计算解。其中:  $\sigma_0 = 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $E = 2 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $c_l = 2 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $\epsilon_0 = \sigma_0 \cdot E^{-1} = 0.5$ 。可以明显地看出计算解与精确的解析解十分接近, 由此可以证明本文中研究的有限变形弹塑性理论在简单拉伸问题是精确的。对于更复杂的变形问题, 很难得到精确的解析解, 故本文中仅与此简单问题的解析解进行比较。

表 1 旋转 Kirchhoff 应力  $T$  的计算解与精确的解析解

总对数应变 $\ln \lambda$	计算解	解析解	应力相对误差
0.051 025 581	101 025.582 1	101 025.581 0	$1.096 02 \times 10^{-8}$
0.079 993 617	129 993.618 3	129 993.617 0	$1.021 76 \times 10^{-8}$
0.110 886 623	160 886.623 7	160 886.622 5	$7.263 73 \times 10^{-9}$
0.144 025 469	194 025.472 0	194 025.468 6	$1.771 83 \times 10^{-8}$
0.179 825 660	229 825.662 3	229 825.660 3	$8.862 96 \times 10^{-9}$
0.218 840 731	268 840.733 7	268 840.731 5	$8.174 32 \times 10^{-9}$
0.261 834 868	311 834.872 6	311 834.868 3	$1.386 68 \times 10^{-8}$
0.309 912 863	359 912.869 1	359 912.862 6	$1.827 26 \times 10^{-8}$
0.364 774 478	414 774.482 1	414 774.478 5	$8.676 55 \times 10^{-9}$
0.429 278 342	479 278.345 3	479 278.342 5	$5.894 44 \times 10^{-9}$
0.508 951 425	558 951.431 2	558 951.425 1	$1.077 57 \times 10^{-8}$
0.617 629 782	667 629.790 8	667 629.782 3	$1.277 61 \times 10^{-8}$
0.835 423 330	885 423.340 9	885 423.330 4	$1.183 08 \times 10^{-8}$

**算例 2 平面应力问题** 对一个中间带有圆洞的金属板条在长度方向加分布力, 研究其变形情况(图 2)。

几何尺寸: 截面长  $l$  为 6.0 m, 宽  $b$  为 20 m; 圆孔直径  $d$  为 10.0 m; 板条厚度为 1.0 m。

材料参数:  $E = 2 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $\nu = 0.3$ , 初始屈服应力  $\sigma_0 = 2.4 \times 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$ , 线性屈服常数  $c_l = 0.2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , 非线性屈服常数  $c = 2.4 \times 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$ , 动力硬化系数  $H = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $\gamma = 0$

加载条件: 在两端加均布力:  $P = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , 且顶端竖向位移保持相等。

由于板条结构及所受荷载的对称性, 只计算其四分之一的变形情况。本算例采用弧长法进行跟踪计算, 加载步为 21 步, 板条中间变形情况见图 3, A 点竖向位移  $u$  与荷载因数  $\psi$  的关系见图 4。

由表 2 和表 3 可以明显看出, 此算法具有明显的二次收敛性。

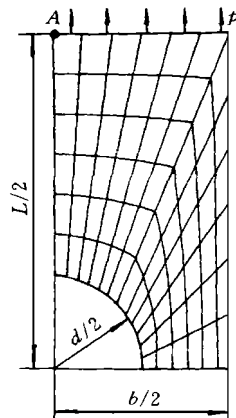


图 2 金属板条截面网格剖分图

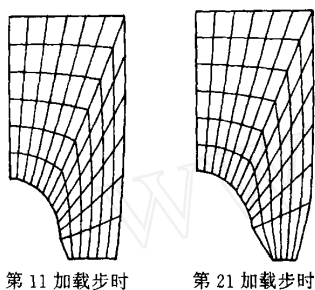


图 3 金属板条的塑性变形

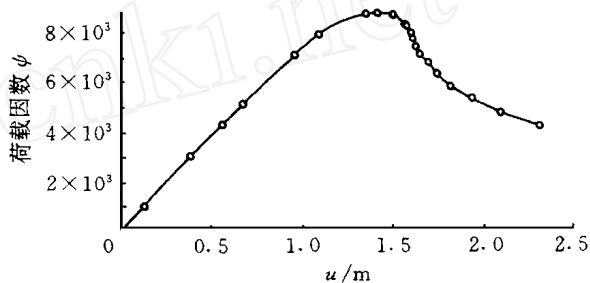


图 4 A 点竖向位移  $u$  与荷载因数  $\psi$  的关系

表 2 不同加载步和迭代步时的不平衡力

加载步数	第 1 迭代步	第 2 迭代步	第 3 迭代步	第 4 迭代步	第 5 迭代步
第 1 步	$5.57 \times 10^5$	29 086	23.881	$2.46 \times 10^{-5}$	
第 3 步	$1.25 \times 10^6$	16 262	294.33	$6.02 \times 10^{-2}$	$1.26 \times 10^{-6}$
第 5 步	$1.56 \times 10^6$	3 887.7	1.983 4	$9.87 \times 10^{-7}$	
第 7 步	$8.58 \times 10^5$	1 275.8	0.155 05	$8.65 \times 10^{-7}$	
第 9 步	$2.79 \times 10^5$	64 411	38 711	246.36	$5.59 \times 10^{-3}$
第 11 步	9 115.4	14.988	$1.35 \times 10^{-4}$		
第 13 步	69 559	255.72	$2.94 \times 10^{-3}$		
第 15 步	16 291	9.536 5	$5.86 \times 10^{-6}$		
第 17 步	26 218	37.142	$8.83 \times 10^{-5}$		
第 19 步	37 124	120.47	$1.57 \times 10^{-3}$		
第 21 步	47 578	349.6	$2.29 \times 10^{-2}$		

表 3 不同加载步和迭代步时的残余功

J

加载步数	第 1 迭代步	第 2 迭代步	第 3 迭代步	第 4 迭代步
第 1 步	$4.75 \times 10^5$	$2.16 \times 10^2$	$7.83 \times 10^{-5}$	
第 3 步	$2.66 \times 10^7$	43.9	$5.13 \times 10^{-3}$	$4.28 \times 10^{-10}$
第 5 步	$1.32 \times 10^3$	$4.43 \times 10^{-1}$	$9.90 \times 10^{-8}$	
第 7 步	$2.71 \times 10^6$	$8.90 \times 10^2$	$7.63 \times 10^{-1}$	$4.01 \times 10^{-8}$
第 9 步	$1.73 \times 10^2$	92.2	$1.81 \times 10^{-3}$	$1.20 \times 10^{-12}$
第 11 步	1.42	$9.47 \times 10^{-6}$	$5.57 \times 10^{-16}$	
第 13 步	$2.44 \times 10^2$	$3.46 \times 10^{-3}$	$5.92 \times 10^{-13}$	
第 15 步	$-1.09 \times 10^2$	$9.50 \times 10^{-6}$		
第 17 步	$-5.43 \times 10^2$	$1.53 \times 10^{-4}$	$3.39 \times 10^{-16}$	
第 19 步	$-1.95 \times 10^3$	$1.33 \times 10^{-3}$	$1.81 \times 10^{-13}$	
第 21 步	$-5.10 \times 10^3$	$2.60 \times 10^{-2}$	$1.61 \times 10^{-10}$	

## 4 结 论

笔者在一阶近似基础上, 推导出了基于替代方程组基础上的精确的应力更新公式、精确的一致性弹塑性模量、精确的平衡方程及精确的一致性弹塑性切线刚度矩阵。由此, 形成了一整套一阶近似意义上的有限变形弹塑性算法的精确表达公式。公式的精确性, 使牛顿迭代方法的优势得以实现, 也就是说计算过程中能够达到二阶收敛率。

本文中所涉及的对张量函数的求导对于推导这套精确的表达公式是非常关键的, 但由于篇幅的限制, 将在另文中作详细阐述。

## 参 考 文 献

- 1 刘学军, 李明瑞. 基于对数应变的有限变形弹塑性理论. 中国农业大学学报, 2000, 5(6): 34~ 39
- 2 Simo J C, Taylor R L. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 22: 649~ 670
- 3 魏祖健, 黄文彬, 李明瑞, 等. 牛顿迭代法求解有限应变弹塑性有限问题的一致性切线模量. 见: 庄逢甘主编. 现代力学与科技进步—2. 北京: 清华大学出版社, 1997. 1009~ 1014