中国农业大学学报　2001, 6(2): 29～31
Journal of China Agricultural University

结构固有频率的精细时程积分法求解

张　强①　陈奎孚　焦群英
(中国农业大学工程基础科学部)

摘　要　用精细时程积分法求得响应的时程, 进行傅里叶变换后, 取频率响应峰值对应的频率, 得到了结构的固有频率。本文中介绍的方法, 对结构的阻尼不做要求, 相对普通的迭代法计算更简单、迅速。

关键词　精细时程积分法; 固有频率; 傅里叶变换
中图分类号　O 327

Solution of Natural Frequency of Structures Using Precise Time-integration Method

Zhang Qiang　Chen Kuifu　Jiao Qunying
(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Abstract　Course of response is obtained by using precise time-integration method; after Fourier transform, the frequency which is opposite to peak value of frequency response is natural frequency of structures. By using the proposed method, it is simple and quick to obtain the accurate results with no restriction to damp.

Key words　precise time-integration method; natural frequency; Fourier transform

在结构设计中结构的动力分析是非常重要的, 精细积分法[1]作为计算结构振动的有效方法得到了推广应用。笔者用精细时程积分法求得了对结构动态分析、测试、及优化设计具有重要价值的固有频率。

1　指数矩阵的精细计算

多自由度的动力学方程

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(t) \tag{1}$$

其中: M, C, K 分别为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵。可化为状态向量形式

$$\dot{V} = HV + r \tag{2}$$

式中: $V = \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ X \end{Bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix}$, $r = \begin{Bmatrix} M^{-1}F(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$

初始条件为

$$V_0 = \begin{Bmatrix} \dot{X}_0 \\ X_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{X}(0) \\ X(0) \end{Bmatrix}$$

收稿日期: 2000-06-21
①张　强, 北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区) 213 信箱, 100083

求得的响应为 $V=[\exp(tH)]V_0+\int[\exp(-\tau H)][r(t-\tau)]d\tau$。只要将 $\exp(tH)$ 表示出来, 积分项就可以用快速卷积[2]高效的计算出来。文献[1]给出了 $\exp(tH)$ 的高精度算法。令 $\Delta t=\tau/2^N$, $T(\Delta t)=\exp(\Delta t H)$, 用级数来近似表达为 $T(\Delta t)\approx\sum_{k=0}^{m}\Delta t^k H^k/k!$。为避免运算中有效数字的丢失, 令 $T_0=H\Delta t\sum_{k=0}^{m-1}\Delta t^k H^k/(k+1)!$, 然后进行迭代, 迭代公式为 $T_i=2T_{i-1}+T_{i-1}T_{i-1}$ ($i=1,2,\cdots,N$), 其中 $T(\tau)=I+T_N$。

2 结构固有频率的求解

对响应作傅里叶变换得

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\exp(-j\omega t)\,dt$$

假设采样总数为 L, 时间间隔为 Δt, 峰值对应的采样数为 n, 则固有频率的计算公式[3]为 $\omega=2\pi n/(L\Delta t)$。

3 算 例

例 1 一个弹簧质量系统, $M=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1.5&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $K=\begin{bmatrix}5&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$, 求系统的固有频率。用解析法求得的固有频率为 $P_1=0.592\ 845$ Hz, $P_2=1.267\ 517$ Hz, $P_3=1.882\ 003$ Hz。用本文所述方法, 取 $L=65\ 536$, $\Delta t=0.005$ s, 求得的时域响应曲线和频域响应见图 1 和图 2, 求得的固有频率为 $P_1=0.593\ 1$ Hz, $P_2=1.267\ 6$ Hz, $P_3=1.882\ 2$ Hz。

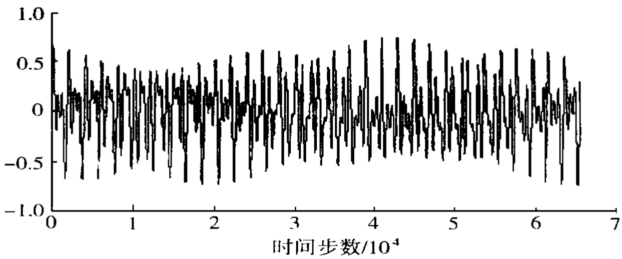

图 1 例 1 中时域响应曲线

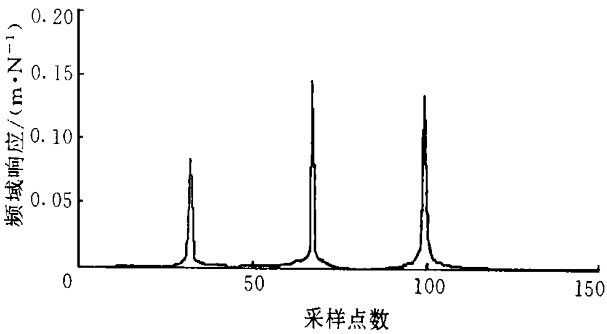

图 2 例 1 中频域响应曲线

例 2 对于一个有阻尼结构

$$M=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1.5&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix}5&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0.5&0.05&0.01\\0.05&0.5&0.05\\0.01&0.05&0.5\end{bmatrix}$$

求系统的固有频率。

取 $L = 65\,536$, $\Delta t = 0.005$ s, 求得的频域响应曲线见图 3, 求得的固有频率为 $P_1 = 0.460\,2$ Hz, $P_2 = 1.227\,2$ Hz, $P_3 = 1.898\,3$ Hz。

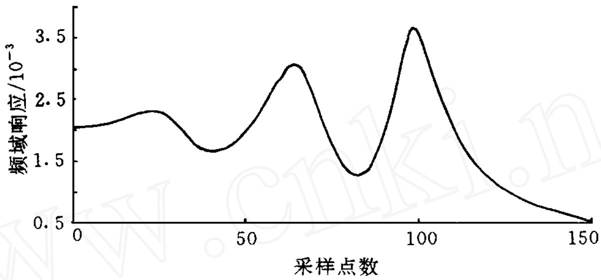

图 3　例 2 中频域响应曲线

4　结　论

对有阻尼结构固有频率的求解问题, 用普通迭代法计算时很复杂, 不便考虑结构的阻尼, 而且只是在求前面几阶的固有频率值时比较方便。用本文所述方法求解时, 对结构给定一个速度和位移的初值, 通过精细时程积分法求得结构的响应, 进行傅里叶变换后, 取频率响应峰值对应的频率, 就是结构的固有频率; 求解时, 对结构的阻尼不做要求, 计算简单、迅速, 结果精确。

参　考　文　献

1　钟万勰 结构动力方程的精细时程积分法 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131～136

2　陈奎孚, 张森文 近似计算连续卷积的几个格式 中国农业大学学报, 1997, 2(2): 33～38

3　许本文, 焦群英 机械振动与模态分析基础 北京: 机械工业出版社, 1998 214～215