中国农业大学学报 2000, 5(2): 9～11
Journal of China Agricultural University

求解非线性方程组的一种改进的ABS算法

王来生[①] 甄 苓
(中国农业大学工程基础科学部)

摘 要 给出了非线性方程组分量方程的一种非线性度量, 根据这种度量, 提出了求解非线性方程组的一种改进的ABS算法, 用该算法将较少的计算量用于非线性程度较低的分量方程, 将较多的计算量用于非线性程度较高的方程。初步的数值试验结果表明, 与原来的非线性ABS算法相比, 大多数情况下, 改进后的算法收敛速度较快。

关键词 非线性方程组; ABS算法; 非线性程度
分类号 O 241.7

A Modified ABS——type Algorithm for Solving Nonlinear System of Equations

Wang Laisheng Zhen Ling
(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Abstract Considering solving nonlinear system of equations. A measure of the nonlinearity of a component equation of the nonlinear system is proposed, According to this measure, a modified ABS—— type algorithm is presented. It spends less computation cost in the component equations with lower nonlinearity and more computation cost in those with higher nonlinearity. Preliminary numerical experiments showed that there is some improvements comparing with the original nonlinear ABS algorithm.

Key words nonlinear system of equations; ABS algorithm; nonlinearity

考虑数值求解非线性方程组

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

其中 $f(x)$ 是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的连续映射, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))^{\mathrm{T}}$。求解式(1)的非线性ABS算法最先是在文献[1]中提出的, 之后又有一些发展, 然而, 所有这些算法都是逐个地、同等地处理方程组中的每个方程。笔者提出了一种改进的ABS算法, 该算法建立了非线性程度概念, 依据非线性程度求解非线性方程组。下面简要介绍一下依据非线性程度建立非线性ABS算法的基本思想。

设当 $i = 1, 2, \cdots, s$ 时函数 $f_i(x)$ 是线性函数, 而当 $i = s+1, s+2, \cdots, n$ 时函数 $f_i(x)$ 是非线性函数。如果对方程组(1)使用ABS算法, 每一次循环将是连续地处理 n 个方程 $f_i(x) = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 得到的迭代点为: $x_1 = y_{1,1}, y_{1,2}, \cdots, y_{1,s}, y_{1,s+1}, \cdots, y_{1,n+1} = x_2$; $x_2 = y_{2,1}, y_{2,2}, \cdots, y_{2,s}, y_{2,s+1}, \cdots, y_{2,n+1} = x_3$; ……。

然而, 由ABS算法的性质, 迭代点 $y_{1,n+1} = x_2$ 已经满足前 s 个线性方程, 即 $f_i(x_2) = 0 (i =$

收稿日期: 1999-07-09
①王来生, 北京清华东路17号 中国农业大学(东校区)71信箱, 100083

$1, 2, \cdots, s$); 因此, 可以设想将ABS算法改进为, 第1次循环由依次处理 n 个方程的 n 次迭代组成, 第1次循环后的每次循环由处理后面 $n-s$ 个非线性方程的 $n-s$ 次迭代组成。这样, 对于每一线性方程只需1次迭代, 而将更多的迭代计算量给予非线性方程。进一步, 若 n 个非线性方程中某些方程接近线性, 而另一些具有较高的非线性, 这时对非线性程度较低的方程可以采用较少的迭代, 而对非线性程度较高的方程采用较多次的迭代。

1 改进的非线性ABS算法

1.1 方程的非线性程度

为了实现前面提出的想法, 必须确定每个方程的非线性程度。假设ABS算法的第1次循环已经完成, 即已得到

$$x_1 = y_1, y_2, \cdots, y_i, y_{i+1}, \cdots, y_{n+1} = x_2 \tag{2}$$

现在考虑第 i 个方程 $f_i(x) = 0$ 的非线性程度。根据ABS算法的特性, 如果 $f_i(x)$ 是线性函数, 则它在 $x = y_j$ 处应为0, 即 $f_i(y_j) = 0$, $j = i+1, i+2, \cdots, n$。这样, 数值 $|f_i(y_j)|$ 在某种意义上就给出了方程 $f_i(x) = 0$ 的非线性程度, 但是考虑具有单变量的二次函数 $\varphi(t) = a + bt + (1/2)c^2$, 系数 c 描述了函数的非线性程度。由此出发, 数值 $|f_i(y_j)|$ 作为非线性程度的度量可被改进。考虑 $f_i(x)$ 在 y_i 的一个邻域内的泰勒展开式

$$f_i(x) \approx f_i(y_i) + \nabla f_i(y_i)^{\mathrm{T}}(x - y_i) + \frac{1}{2}(x - y_i)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f_i(x - y_i)(x - y_i) \tag{3}$$

因为式(2)中迭代值 y_i 满足 $f_i(y_i) + \nabla f_i(y_i)^{\mathrm{T}}(y_j - y_i) = 0$, $(j = i+1, i+2, \cdots, n)$; 于是有 $f_i(y_j) \approx (1/2)(y_j - y_i)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f_i(y_j - y_i)(y_j - y_i)$。根据式(3), 可用

$$\sigma_i = \frac{|f_i(y_j)|}{|f_i(y_j) - f_i(y_i)|} \tag{4}$$

作为第 i 个方程非线性程度的近似估计。

1.2 改进的ABS算法

根据前面的讨论, 可建立求解方程组(1)的改进算法。

1) 初始步。a. 置初值 x_0, 收敛精度 ϵ 和最大迭代次数 N。b. 置参数 $\epsilon_1 \in (0, 1)$, 根据 ϵ_1 将 n 个方程分成2组, 非线性程度较低的为一组, 非线性程度较高的为另一组; 取整数参数 K (K 为一个主迭代过程中对非线性程度较高的一组方程迭代的次数)。c. 设 M_h 为内层迭代次数, $h = 1, 2$; 置 $M_1 = 1$。

2) 对方程组(1)的 n 个方程, 用基本的ABS算法完成一个主迭代过程, 得到 $x_1 = y_{n+1}$, 检查 $\|f(x_1)\| < \epsilon$ 是否成立, 成立则得到解 x_1, 停止; 不成立则继续。

3) 计算 n 个方程的非线性程度。a. 根据2)中得到的点列 $y_1, y_2, \cdots, y_i, y_{i+1}, \cdots, y_{n+1}$ 计算 σ_k, 由式(4)得 $\sigma_k = \dfrac{|f_k(y_{k+1})|}{|f_k(y_{k+1}) - f_k(y_k)|}$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 以此作为第 k 个函数 $f_k(x)$ 的非线性程度, 如果 $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n = 0$, 则置 $x_0 = x_1$, 转2), 否则继续。b. 定义标准化数列 $\sigma_1', \sigma_2', \cdots, \sigma_n'$, 使得 $\sigma_k' = \sigma_k / \sigma_{\max}$, 其中 $k = 1, 2, \cdots, n$; $\sigma_{\max} = \max\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$。c. 为了调整 n 个方程 $f_k(x) = 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$ 的排列次序, 定义映射 $V: \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$ 使得 $\sigma_{V,1}' \le \sigma_{V,2}' \le \cdots \le \sigma_{V,n}'$。d. 利用参数 ϵ_1 定义整数 s, 使得 $\sigma_{V,s}' < \epsilon_1 < \sigma_{V,s+1}'$。

4) 处理重新排列后的前 s 个方程 $f_{V,k}(x) = 0$, $k = 1, 2, \cdots, s$。a. 令 $y_1 = x_1$, $H_1 = I$, $k = 1$。

b. 定义搜索向量 $p_k = H_k^T z_{V,k}$, 其中 $z_{V,k} \in \mathbf{R}^n$, 满足 $p_k^T \nabla f_{V,k}(y_k) \neq 0$。c. 定义步长 $\alpha_k = f_{V,k}(y_k) / (p_k^T \nabla f_{V,k}(y_k))$。d. 修正子迭代点 y_k, 使得 $y_{k+1} = y_k - \alpha_k p_k$。e. 修正 H_k, 使得 $H_{k+1} = H_k - H_k \cdot \nabla f_{V,k}(y_k) w_k^T H_k$, 其中 $w_k \in \mathbf{R}^n$, 满足 $w_k^T H_k \nabla f_{V,k}(y_k) = 1$。如果 $k = s$, 则令 $x' \triangleq y_{s+1}$, $H' \triangleq H_{s+1}$, 转 5) a; 否则继续。f. 置 $k = k+1$, 转 b。

5) 处理后 $n-s$ 个方程 $f_{V,k}(x) = 0$, $k = s+1, s+2, \cdots, n$。令 $y_{s+1} = x'$, $H_{s+1} = H'$, $M_2 = 1$, $k = s+1$。其他步骤与前面相同, 此处不再赘述。

6) 收敛性检验。a. 检查 $\|f(x_2)\| < \epsilon$ 是否成立, 成立则得到解 x_2, 停止; 否则继续。b. 如果 $M_2 = K$, 并且 $M_1 = N$, 则停止; 如果 $M_2 = K$, $M_1 \neq N$, 则令 $x_0 = x_2$, $M_2 = M_1 + 1$, 转 2) a。否则令 $x' \triangleq x_2$, $M_2 = M_2 + 1$, 转 5) a。

2　收敛性定理

为了得到非线性 ABS 算法的局部收敛定理, 假设下面的条件成立: 1) 映射 $f(x)$ 有孤立零点 x^+; 2) Jacobi 矩阵 $A(x^+)$ 非奇异; 3) 存在着正数 δ_0, τ_1 和 α, 使得对任意的 $x, y \in U(x^+, \delta_0)$, 有 $\|A(x) - A(y)\| \leq \tau_1 \|x - y\|^{\alpha}$; 4) 存在一个正数 ϵ, 且不依赖于 i, 使得在所有循环中对于 $k = 1, 2, \cdots, n$, 如果有 $x_k \in U(x^+, \delta_0)$, 则 $|p_k'^T A(x_k)^T v_k'| \geq \epsilon$, 其中 p_k' 和 v_k' 是单位向量 $p_k' \triangleq p_k / \|p_k\|$, $v_k' \triangleq v_k / \|v_k\|$。条件 1)～3) 是关于映射 $f(x)$ 的标准假设, 而条件 4) 涉及的是算法中的参数。

定理 1　如果假设条件 1)～4) 成立, 则存在 $\delta' \in (0, \delta_0)$, 使得对于任意的 $x_1 \in (x^+, \delta')$ 改进的 ABS 算法生成的序列 x_i 以不低于 $1+\alpha$ 的 Q-收敛阶收敛到 x^+。该定理的证明与文献[2]中定理 4.1 的证明完全类似, 在此就不详细给出了。

3　数据试验与结论

将改进的 ABS 算法与原 ABS 算法进行比较, 主要比较"子迭代的总数, 即处理分量方程 $f_k(x) = 0$ 的总次数"。测试问题选自文献[3], 初始值与文献[3]中相同, 改进算法中参数的选择与非线性黄算法相当, 为 $z_k = \nabla f_k(y_k)$, $w_k = \nabla f_k(y_k) / \nabla f_k(y_k)^T H_k \nabla f_k(y_k)$, 置 $\epsilon = 10^{-7}$, $K = 2$, $N = 15$, $\epsilon_1 = 0.5$ 时, 数值结果见表 1。

表 1　2 种算法效率对比

问题序号	子迭代总数	
	原算法	改进算法
1	32	31
2	26	22
3	12	9
4	40	36
5	12	11
6	26	24
7	64	59
8	30	23
9	12	17

从数值试验的结果看出, 当收敛精度 ϵ 相同时, 对于大多数问题使用改进算法的迭代总数比原算法少, 即改进算法收敛快; 只有第 9 个问题, 原算法迭代次数比改进算法少, 即比改进算法收敛快。

参 考 文 献

1 Abaffy J, Galantai A, Spedicato E. The local convergence of ABS methods for nonlinear algebraic system. Number Math, 1987, 51: 429～439

2 Deng N, Spedicato E, Zhu M. A local convergence therorem for nonlinear ABS algorithms. Comp Appl Math, 1994, 13(1): 49～59

3 Roose A, Kulla V. Test examples of systems of nonlinear equations, version 3-90. Tallin: Estonian Software and Computer Service Company, 1990. 200p