中国农业大学学报 1999,4(6):34~37
Journal of China Agricultural University

速度瞬心的加速度特性及其应用

陈奎孚[①] 汪倩华 张云文
(中国农业大学工程基础科学部) (中国农业大学机械工程学院)

摘 要 分析了瞬心的加速度特性,建立了刚体平面纯滚动的轨迹方程。指出瞬心加速度正交于瞬心线。据此,不仅能将圆盘纯滚动运动分析纳入普通的杆系几何法,而且可简化任意轮廓的刚体纯滚动的运动分析过程。

关键词 运动分析;瞬心;加速度;几何法;轨迹
分类号 O 311.2

Characteristics of Acceleration of Instantaneous Velocity Center and Its Application

Chen Kuifu Wang Qianhua Zhang Yunwen
(College of Applied Engineering Sciences,CAU) (College of Machinery Engineering,CAU)

Abstract The characteristics of the acceleration of the instantaneous velocity center(IVC) were presented, and the trajectory equation for pure rolling of rigid body(PRORB) was developed. The conclusion is that the acceleration of IVC is orthogonal to velocity centrode. In the light of this, not only the geometric motion analysis method for PRORB can be included in normal analysis for rod-type system motion, but also its computational process can be simplified.

Key words motion analysis; instant center; acceleration geometric method; orbit

刚体平面运动分析中,速度瞬心是一个非常重要的概念,特别是对于只滚不滑的纯滚动问题。本文中将证明刚体平面运动瞬心加速度有关特性,利用这些特性不仅可以简化分析,而且可以统一几何法中的分歧。

1 瞬心线和刚体上该瞬心点的加速度正交

把平面运动刚体在每个时刻的速度瞬心连接起来,可以得到一条曲线,我们简称这条曲线为瞬心线。对于定轴转动,它退化为一个固定点,对于平动,它是位于无穷远处的一个奇点;而对普通平面运动,它是一条平面曲线。

瞬心的速度为零,但其加速度未必为零。关于该点加速度,它具有这样的特性:瞬心线和刚体上该瞬心点的加速度正交。

证明 将这个证明过程分 2 个部分。

1)确定瞬心的位置。在图 1 中,点 A 坐标为(x_A, y_A)。假定该点的速度 $\boldsymbol{v}_A$、加速度 $\boldsymbol{a}_A$ 和刚

收稿日期:1999-04-30
①陈奎孚,北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区)74 信箱,100083

体转动的角速度 ω 及角加速度 α 均为已知。先确定瞬心 C 的坐标(x_C, y_C)。点 C 位于通过点 A 的法线上。根据定义,法线垂直于该点的速度方向(切向),因此该点的法线方程为 $v_{Ax}(x-x_A)+v_{Ay}(y-y_A)=0$,故点 C 的坐标首先要满足

$$v_{Ax}(x_C-x_A)+v_{Ay}(y_C-y_A)=0 \tag{1}$$

其次 CA 长度 l_{CA}应保证点 C 的速度为 0,这就是

$$l_{CA}\omega=(v_{Ax}^2+v_{Ay}^2)^{1/2}=[(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2]^{1/2}\omega \tag{2}$$

联立式(1)和(2),并结合图中的位置可得 $y_C=y_A+v_{Ax}/\omega$, $x_C=x_A-v_{Ay}/\omega$,因此瞬心线的切线斜率为

$$\mathrm{d}y_C/\mathrm{d}x_C=\frac{\mathrm{d}y_C/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x_C/\mathrm{d}t}=\frac{v_{Ay}\omega^2+a_{Ax}\omega-v_{Ax}\alpha}{v_{Ax}\omega^2-a_{Ay}\omega+v_{Ay}\alpha} \tag{3}$$

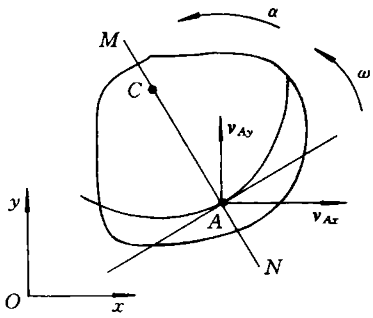

图 1　刚体平面运动示意

2)正交性证明。以 A 为基点,点 C 的加速度合成如图 2 所示。矢量公式为

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{CA}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{CA}^{n} \tag{4}$$

其中 $a_{CA}^{\tau}=\alpha l_{CA}, a_{CA}^{n}=\omega^2 l_{CA}$。把式(4)写成投影式

$$\left.\begin{aligned}a_{Cx}&=a_{Ax}-\alpha l_{CA}\cos\theta+\omega^2 l_{CA}\sin\theta\\ a_{Cy}&=a_{Ay}-\alpha l_{CA}\sin\theta-\omega^2 l_{CA}\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中 θ 为点 A 的速度与 x 轴的夹角。根据图 2 的几何关系有 $l_{CA}\cos\theta=y_C-y_A=v_{Ax}/\omega, l_{CA}\sin\theta=x_A-x_C=v_{Ay}/\omega$,把它们代入式(5)有

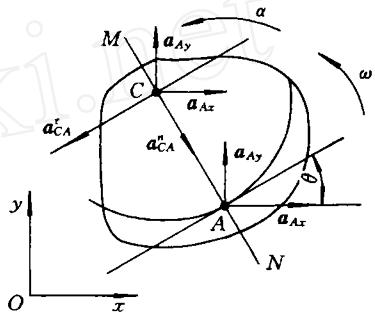

图 2　点 C 的加速度分析

$$\left.\begin{aligned}a_{Cx}&=a_{Ax}-\alpha v_{Ax}/\omega+\omega v_{Ay}\\ a_{Cy}&=a_{Ay}-\alpha v_{Ay}/\omega-\omega v_{Ax}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

根据式(3)和(6)有

$$\frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}x_C}\times\frac{a_{Cy}}{a_{Cx}}=\frac{v_{Ay}\omega^2+a_{Ax}\omega-v_{Ax}\alpha}{v_{Ax}\omega^2-a_{Ay}\omega+v_{Ay}\alpha}\times\frac{a_{Ay}\omega-\alpha v_{Ay}-\omega^2 v_{Ax}}{a_{Ax}\omega-\alpha v_{Ax}+\omega^2 v_{Ay}}=-1$$

这即表明瞬心加速度与瞬心线正交。

通常纯滚动问题中瞬心线是已知的,刚体沿此线作纯滚动。刚体的任意平面运动的瞬心线一般并不知道,但也可以把这条曲线想象为固定面,刚体运动想象为边缘曲率变化的物体沿着这个固定面作无滑动地滚动。

下面给出瞬心线的几个特例。

特例 1　瞬心在绝对坐标系中固定不动。显然任意瞬时,刚体上每点都是绕定点的圆周运动。根据定义,这就是定轴转动。此时瞬心点的加速度恒为 0。

特例 2　瞬心在刚体上的位置不变。显然瞬心线就是刚体上某点轨迹,由于这点在任意时刻的速度为零(瞬心),所以这点不运动。显然这也是定轴运动。

特例 3　瞬心的轨迹为直线运动。这种运动并没有什么特别之处,并不要求滚动物体的曲率为常数,比如椭圆轮在沿直线纯滚动。

2　瞬心加速度沿该点轨迹切向方向

将质点在 $t+\Delta t$ 时刻的位移用泰勒级数展开,即

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\dot{x}(t)\Delta t+\ddot{x}(t)\Delta t^2+O(\Delta t^3)$$
$$y(t+\Delta t)=y(t)+\dot{y}(t)\Delta t+\ddot{y}(t)\Delta t^2+O(\Delta t^3)$$

如果在 t 时刻,它是瞬心,则有 $\dot{x}(t)=0,\dot{y}(t)=0$,所以

$$\ddot{x}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}[x(t+\Delta t)-x(t)]/\Delta t^2$$
$$\ddot{y}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}[y(t+\Delta t)-y(t)]/\Delta t^2$$

这表明瞬心加速度方向与该点轨迹切向方向相同,而通常轨迹的切向方向是速度方向。

与第1节结论比较可知,瞬心点的绝对轨迹与瞬心线正交。

3　根据轨迹方程考察瞬心的速度和加速度

第1节论述了刚体平面运动可以看成是边缘曲率变化的刚体沿瞬心线的纯滚动问题。尽管瞬心线可能是平面曲线,但可以假想通过一个变换把它变为直线,从而只需建立沿直线纯滚动问题的方程。建立图3所示坐标系,设刚体边缘曲线为 $y=f(x)$。显然,边缘在原点与 x 轴相切,要求

$$f(0)=0\quad f'(0)=0 \tag{7}$$

其中 $f'(x)=\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$。经过繁冗的推导,可得点 B 的轨迹方程

$$\left.\begin{aligned}&x_B=s-a\cos\varphi-f(a)\sin\varphi\\&y_B=a\sin\varphi-f(a)\cos\varphi\\&f'(a)=\tan\varphi\\&s=\int_0^a\sqrt{1+[f'(\alpha)]^2}\mathrm{d}\alpha\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

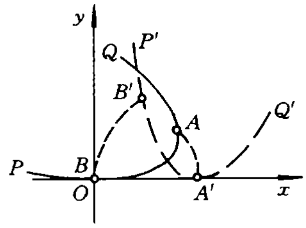

图3　只滚不滑示意图

给定一个 a,从后2式可唯一确定 s 和 φ(是 a 的函数),把它们代入前2式,这样得到了以 a 为参数的平面轨迹方程。在式(8)中 a 是时间 t 的单变量函数,由最后2式可确定 φ 和 s 是 a 的单变量函数,从而它们也是 t 的单变量函数。由前2式显然推得 x_B,y_B 也是 t 的单变量函数。将式(8)各式对时间求导,并利用式(7)有 $\dot{x}_B=0,\dot{y}_B=0$,即点 B 速度为0。这是必然的,因为点 B 是瞬心。

对式(7)求二阶导数,并利用式(7),可得

$$\begin{cases}\ddot{x}_B=0\\\ddot{y}_B=\dot{a}\dot{\varphi}=\dot{a}^2f''(0)=\dot{s}^2f''(0)\end{cases}$$

即点 B 的加速度只有垂直分量。这就从轨迹方程的角度证明了瞬心的加速度与瞬心线正交。

根据定义,曲率公式为

$$K=|f''/(1+f'^2)^{3/2}| \tag{9}$$

将 $t=0$ 时条件 $f'(0)=0$ 代入式(9)有 $|f''(0)|=K$,所以

$$\ddot{y}_B=\dot{a}^2K=\dot{s}^2K \tag{10}$$

这里的曲率 K 是指滚动物体边缘的曲率,它既不同于刚体上质点轨迹的曲率,也不同于

瞬心线的曲率。对于圆柱,$K=1/R$ 是一个常数。式(10)与向心加速度的公式相似,它只与刚体运动的角速度直接相关,与角加速度无直接关系。

现在分析刚体上瞬心点的轨迹曲率。如果采用常规的轨迹曲率公式 $K=a_n/v^2$,那么将会出现 0/0,因而只能用极限的方法来完成这个计算。经过复杂的运算,可以证明曲率半径为零。这个概念与直线运动刚好相反(直线曲率为零,曲率半径为无穷大),因而此时质点速度必须为零,否则向心加速度为无穷大。

4　瞬心的加速度特性在运动分析中的应用

无论是点的合成运动还是刚体的平面运动,其速度和加速度的合成公式都是通过对位移合成公式求导得到的。只要利用这组导出公式,杆系运动分析一般都能完成,无须再求导数;但对图 4 所示纯滚动问题,常规的解法仍要求导。

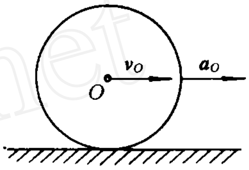

图 4　纯滚动问题

为了分析各点的加速度,通常首先根据只滚不滑的条件,写出 $v_O=r\omega$,并说明这个关系在任何时刻都成立,再对左右两边求导得出角加速度。这就存在 3 个问题:1)杆系运动分析不用求导,而且杆系运动分析得到的往往是某个时刻的关系,也不允许求导,这里为什么必须求导;2)不用求导的办法是否可以解出,如果解不出,还应补充什么条件;3)椭圆轮的纯滚动的问题如何解决。经过仔细分析,如果不用求导,只利用 $v_O=r\omega$ 这个关系,仅有加速度合成公式无法解出这类问题。

如果从自由度角度来分析这个问题,就不难理解无法求出的原因。平面运动的刚体有 3 个自由度,而 $v_O=r\omega$ 只提供了 1 个约束,还剩下 2 个自由度,因此各点运动量无法表示为时间的单变量函数。

在求导的解法中,表面上看 $a_O=r\alpha$ 是由 $v_O=r\omega$ 导出的结果,似乎两者不是独立的约束。实际上仔细分析这 2 个条件,后者并不蕴涵前者。只有提供条件 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=0$,才能由后者导出前者。也就是说,利用 $a_O=r\alpha$ 公式隐含了一个与 $v_O=r\omega$ 独立的约束。平面运动物体的 3 个自由度被约束去掉了 2 个,只余下 1 个自由度,自然各点运动量可用时间唯一表示。

当然,$a_O=r\alpha$,$v_O=r\omega$,$\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=0$ 这 3 个等式中只有 2 个独立,任选其中 2 个,再加上点的速度和加速度合成公式即可完全确定轮子上任意点的速度和加速度。

在运动分析中,习惯上把约束直接表达为刚体某些特定点的速度、加速度的特定性质,如方向已知、法线方向速度相等等,这样可直接利用速度和加速度合成公式;因而对瞬心线已知的问题,可以把上述瞬心加速度与瞬心线正交作为一个约束条件提出。采用这个条件,一般可由速度和加速度合成公式导出结果。这样就可把纯滚动问题统一到杆系解法之中。

当然,对于圆轮纯滚动问题,这种处理方法未能体现其优点;但若对椭圆轮只滚不滑的问题的加速度进行分析,传统方法非常复杂,而把瞬心的加速度性质作为约束条件来处理,其求解过程则十分简单。