中国农业大学学报　1999,4(6):29～33
Journal of China Agricultural University

成批到达有限容量的串联服务系统

苏时光[①]　陈　薇
(中国农业大学基础科技学院)

摘　要　讨论了2级排队系统。顾客是成批Poisson流输入的,第1级是含n个并联且服从指数分布的服务台,第2级是单个服从pH分布的服务台。给出了排队平稳条件以及用矩阵迭代法得到了平稳队长分布和受阻概率分布。

关键词　成批输入;pH分布;矩阵迭代解;受阻时间
分类号　O 226

Batch Arrival for Two-stage Tandem Queuing System With Finite Capcity

Su Shiguang　Chen Wei
(College of Fundamental Science & Technology,CAU)

Abstract　The two stage queue system between the two stage service with finite capcity was discussed. Customers arrival are bulk input with poisson process. There are n parallel independent servers with expontenial in first stage. The second stage service is single server with pH-distribution. The Stationary condition and stationary queue length distribution are given in terms of matrix iterative solution. Block probability and block time probability distribution are given.

Key words　bulk input; pH-distribution; matrix-iterative solution; block time

1　排队模型

顾客以参数为λ的Poisson过程成批进入系统,每批是一个随机变量X,其概率分布为$P_i=P\{X=i\},i=1,2,\cdots,L$。第1级有$n$个并联且同服从均值为$\mu^{-1}$的负指数分布,当顾客接受第1级服务后才能进入第2级服务或等待;第2级服务时间间隔满足pH分布记作(β,S),其中$\beta_{m+1}=0$,β为初始位相概率$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$,$S$为$m$阶不可约矩阵。1级与2级之间有容量为$K$的缓冲器。当第2级顾客(含服务和等待)达到$k$时,1级停止服务直至2级顾客小于$k$为止,到达过程、1级服务和2级服务是相互独立的。

2　主要结论

不妨设$L<k$,本文以下出现的e是所有元素为1的列向量,维数随运算有意义而定。状态空间$E=\{(i,0),i\geqslant 0\}\cup\{(i,j,l),i\geqslant 0,1\leqslant j\leqslant k,1\leqslant l\leqslant m\}$,其中:$i$为1级顾客数;$j$为2级顾

收稿日期:1999-07-01
①苏时光,北京圆明园西路2号 中国农业大学(西校区)基础科技学院,100094

客数;l 为 2 级进入服务顾客的位相。

按字典序排列 i 水平

$$(i,0);(i,1,1),(i,1,2),\cdots(i,1,m);\cdots;(i,k,1)\cdots(i,k,m)$$

可得到无穷小生成矩阵 Q(下 1 上 L 的带状矩阵)。有

$$Q=\begin{bmatrix} A_{00} & A_2 & A_3 & \cdots & A_{n-1} & A_n & A_{n+1} & \cdots & A_{L+1} & 0 & 0 & \cdots \\ A_{10} & A_{11} & A_2 & \cdots & A_{n-2} & A_{n-1} & A_n & \cdots & A_L & A_{L+1} & 0 & \cdots \\ 0 & A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n-3} & A_{n-2} & A_{n-1} & \cdots & A_{L-1} & A_L & A_{L+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ & & & & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n-1} & A_2 & \cdots & A_{L-n+2} & A_{L-n+3} & A_{L-n+4} & \cdots \\ & & & & 0 & A_0 & A_1 & \cdots & A_{L-n+1} & A_{L-n+2} & A_{L-n+3} & \cdots \\ & & & & 0 & 0 & A_0 & \cdots & A_{L-n} & A_{L-n+1} & A_{L-n+2} & \cdots \\ & & & & & & & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

其中 Q 的元为$(1+mk)$阶的矩阵,当 $0\leqslant i\leqslant n-1$ 时,有

$$A_{ii}=\begin{bmatrix} -\lambda-i\mu & 0 & 0 & \cdots & & \\ S^0 & S-\lambda I-i\mu I & 0 & \cdots & & \\ & S^0\beta & S-\lambda I-i\mu I & \cdots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & S^0\beta & S-\lambda I-i\mu I & 0 \\ & & & 0 & S^0\beta & S-\lambda I \end{bmatrix}$$

$$A_{l+1}=p_l\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda I \end{pmatrix} \quad 1\leqslant l\leqslant L$$

$$A_{i,i-1}=\begin{pmatrix} 0 & i\mu\beta & & & \\ & 0 & i\mu I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & i\mu I \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad 1\leqslant i\leqslant n-1$$

$$A_0=\begin{pmatrix} 0 & n\mu\beta & 0 & & \\ & 0 & n\mu I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & n\mu I \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1=\begin{pmatrix} -\lambda-n\mu & & & & & \\ S^0 & S-\lambda I-n\mu I & & & & \\ & S^0\beta & S-\lambda I-n\mu I & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & S^0\beta & S-\lambda I-n\mu I & \\ & & & & S^0\beta & S-\lambda I \end{pmatrix}$$

其中:$S^0=-Se$;I 是 m 阶的单位矩阵;"0"与空白处均为 m 阶的 0 矩阵。

显然 Q 是不可约的,现将 Q 重新分块成三对角带状矩阵,即

$$Q=\begin{pmatrix} \tilde{B}_0 & \tilde{A}_0 & 0 & \cdots \\ \tilde{A}_2 & \tilde{A}_1 & \tilde{A}_0 & \cdots \\ 0 & \tilde{A}_2 & \tilde{A}_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Q 过程是 QBD 过程,其中

$$\tilde{A}_2=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & A_0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad \tilde{A}_1=\begin{pmatrix} A_1 & \lambda p_1 I & \lambda p_2 I & \cdots & \lambda p_{L-1} I \\ A_0 & A_1 & \lambda p_1 I & \cdots & \lambda p_{L-2} I \\ 0 & A_0 & A_1 & \cdots & \lambda p_{L-3} I \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & A_0 & A_1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_0=\lambda\begin{pmatrix} p_L I & 0 & \cdots & 0 \\ p_{L-1} I & p_L I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_1 I & p_2 I & \cdots & p_L I \end{pmatrix}$$

其中 I 是$(1+km)$阶单位矩阵。

记 $\tilde{A}=\tilde{A}_2+\tilde{A}_1+\tilde{A}_0$。容易验证,$\tilde{A}$ 是对角元素为负、非对角元素非负、行和为零的不可约保守半稳定矩阵。

定理 1　m 阶不可约、保守的半稳定矩阵 A 对应特征方程有唯一实的最大模特征值 r,相应地有唯一正的特征向量 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m)$,$\pi_i>0$,$i=1,2,\cdots,m$,$\pi e=1$。

证明　取 $c>\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{-A_{ii}\}$,$B=cI+A$,为不可约非负矩阵。由 Frobenius's 定理[1],B 有正的特征值 s,是特征方程的单根,所有特征值的模$\leqslant s$,及正特征向量 π,$\pi e=1$ 是唯一的,矩阵 B 的特征值与矩阵 A 的特征值经 z 平面变换,相应的特征向量是对应相同的,故 B 对应 s 的 π 也是 A 对应 r 的 $\pi(s=r+c)$。证毕。

定理 2　$\tilde{A}$ 有唯一左不变概率向量 $\tilde{\pi}$,有

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\pi}=\frac{1}{L}(\pi,\pi,\cdots,\pi),\pi=(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_k)\\&\pi_0=\left[\beta\sum_{i=0}^{k-1}\Omega^i e+n\beta\mu\Omega^{k-1}(-S)^{-1}e\right]^{-1}\\&\pi_i=\pi_0\beta\Omega^i,\quad 1\leqslant i\leqslant k-1\\&\pi_k=n\mu\pi_0\Omega^{k-1}(-S)^{-1},\Omega=n\mu(n\mu I-S-n\mu e\beta)^{-1}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$\tilde{\pi}$ 是 $L(km+1)$ 维正向量。

证明 矩阵 $\tilde{A}$ 的每列和为 $A_0+A_1+\lambda I$,是不可约、保守的不稳定矩阵。由定理1,唯一正不变概率向量 π 满足

$$\left.\begin{aligned}&\pi(A_0+A_1+\lambda I)=0\\&\pi e=1\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

解式(2)得

$$\left.\begin{aligned}&\pi_0(-n\mu)+\pi_1S^0=0\\&\pi_0(n\mu\beta)+\pi_1(S-n\mu I)+\pi_2S^0\beta=0\\&\pi_{i-1}n\mu I+n_1(S-n\mu I)+\pi_{i+1}S^0\beta=0\quad 2\leqslant i\leqslant k-1\\&\pi_{k-1}n\mu I+\pi_kS=0\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

式(3)中除第1式外,其余右乘 e 得

$$\left.\begin{aligned}&\pi_0n\mu=\pi_1S^0\\&\pi_{i-1}n\mu e=\pi_iS^0\quad 2\leqslant i\leqslant k\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

式(4)右乘 β 代入式(3)得

$$\left.\begin{aligned}&\pi_0(-n\mu)+\pi_1S^0=0\\&\pi_{i-1}n\mu+\pi_i(S-n\mu I+n\mu e\beta)=0\quad 1\leqslant i\leqslant k-1\\&\pi_{k-1}n\mu+\pi_kS=0\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

$S-n\mu I+n\mu e\beta$ 是非奇异矩阵,其逆矩阵所有元素为负[2],P_{86},P_{31}和 S 是非奇异的,其逆矩阵元素都非负。

从式(5)和 $\pi e=1$ 易验证式(1)后3式,显然也有 $\tilde{\pi}\tilde{A}=0$,由定理1,$\tilde{\pi}$ 是唯一的。证毕。

定理3 不可约马尔夫过程是正常返的充要条件是

$$n\mu\pi_0+n\mu\pi_0\beta\sum_{i=1}^{k-1}\Omega^i e>\lambda\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=l}^{L}P_i\tag{6}$$

证明

必要性。

从文献[2]定理1.7.1需满足 $\tilde{\pi}\tilde{A}_2\tilde{e}>\tilde{\pi}\tilde{A}_0\tilde{e}$ 即可直接得到式(6)。

充分性。

只要证且存在唯一正概率向量 $\tilde{x}$ 满足 $\tilde{x}Q=0$ 即可。

最小非负矩阵 R 满足

$$R^2\tilde{A}_2+R\tilde{A}_1+\tilde{A}_0=0\tag{7}$$

$\tilde{A}$ 不可约,由文献[2]定理1.7.1得 $\mathrm{SP}(R)<1$,式(7)右乘 $\tilde{e}$ 得 $(I-R)(R\tilde{A}_2\tilde{e}+\tilde{B}_0\tilde{e})=0$。由于

$SP(R)<1$,$I-R$ 是非奇异的,则$(R\widetilde{A}_2+\widetilde{B}_0)\tilde{e}=0$。

矩阵 $R\widetilde{A}_2+\widetilde{B}_0$ 是不可约、保守的半稳定矩阵,由定理 1 存在唯一正向量 $\tilde{x}_0$ 满足

$$\begin{cases}\tilde{x}_0(R\widetilde{A}_2+\widetilde{B}_0)=0\\ \tilde{x}_0(I-R)^{-1}e=1\end{cases}$$

得

$$\tilde{x}_i=\tilde{x}_0R^i,i\geqslant1$$

$$\tilde{x}_i=(x_{iL},x_{iL+1},\cdots,x_{iL+L-1}),i\geqslant1$$

$$x_j=(x_{j0},x_{j,1,1},\cdots,x_{j,1,m},\cdots,x_{j,k,1},\cdots,x_{j,k,m})$$

记 $\tilde{x}=(\tilde{x}_0,\tilde{x}_1,\cdots)$。容易验证 $\tilde{x}Q=0$,$\tilde{x}$ 为平稳条件下的平稳概率分布即队长平稳分布。证毕。

在定理 3 证明中,1 级受阻概率向量为

$$q=\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_{i,k,1},\sum_{i=1}^{\infty}x_{i,k,2},\cdots,\sum_{i=1}^{\infty}x_{i,k,m}\right)=(q_1,q_2,\cdots,q_m)$$

受阻概率为$\sum_{i=1}^{m}q_i$,受阻时间的概率分布 $q(t)$是 pH 分布,记作(q,S),$q_{m+1}=1-qe$。

参 考 文 献

1 Gantmacher F R. The Theory of Matrices. New York:Chelsea,1959

2 Neuts M F. Matrix-Geometric Solution in Stochastic Models: An algorithmic approach. Johns Hopkins University Press,1981