中国农业大学学报　1998,3(6):28～33
Journal of China Agricultural University

曲壳有限变形研究之一:理论及有限元列式①

詹福良②　李明瑞
(中国农业大学工程基础科学部)

摘　要　以位移型退化壳理论为基础,提出了精确描述壳体结构几何非线性行为的有限变形完整理论。该理论充分发挥了刚性线段的运动学模型和有限转动矩阵的作用,精确表达出非线性的位移—应变关系,抛弃了以往的各种简化假设,如小位移、小剪切应变、小转动增量,乃至小加载步长等。采用TL方法给出了有限变形完整理论的曲壳单元列式。

关键词　有限变形;非线性有限元;退化壳;有限转动;TL方法

中图分类号　O 343.5

Study on Finite Deformation of Curved Shells (Ⅰ): Theory and Finite Element Formulation

Zhan Fuliang　Li Mingrui
(College of Apllied Engineering Sciences,CAU)

Abstract　A finite deformation theory that can precisely describe the nonlinear geometric behavior of plate & shell structures is proposed. By taking full advantage of the kinematic model of a rigid line and the finite rotation matrix, the simplification assumptions such as small displacement, small normal or shearing strain, small rotation, as well as small loading step etc can be abandoned. The finite element formulation of this theory is deduced with TL method.

Key words　finite deformation; nonlinear finite element; degenerated shell; finite rotation; TL method

现有的2维和3维连续体的有限变形理论已趋于完善,但梁、板壳一类结构问题的非线性理论[1]还不能令人满意。文[2～5]已在梁板壳有限变形精确理论方面做了开创性的工作,本文则侧重于论述该理论在板壳方面的具体应用和发展。为突出几何非线性问题的特点,这里只考虑材料为线弹性的情况,暂不进行材料非线性的讨论。

1　基本假设和一般性描述

采用位移型退化壳单元模型,以壳体中面为基准进行有限元离散。壳体上任意点的位移由中面点的线位移和中面法线的转轴位移共同确定。假定变形过程中法线仍为直线,且长度保持不变,即采用刚性线段假设;但该法线在变形后不一定再垂直于变形后的壳体中面,属考虑横

收稿日期:1998-06-26
①国家自然科学基金资助项目
②詹福良,北京清华东路17号 中国农业大学(东校区)213信箱,100083

向剪切变形影响的 Mindlin 板范畴。该模型适用于中厚板壳的分析计算，当采用减缩积分时，也适用于薄板壳。

1.1　壳体中面和法线的描述

把壳体中面及其法线作为壳体几何形状的描述参数。壳单元的中面为一空间曲面，以初始位形为参考位形并建立总体坐标系，于是壳单元中面上任一点的坐标可由中面节点 i 表示为

$$\boldsymbol{x}_c = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\boldsymbol{x}_i \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{x}_c=(x_c,y_c,z_c)^{\mathrm{T}}$ 为中面上任意一点 A_0 的坐标向量；$\boldsymbol{x}_i=(x_i,y_i,z_i)^{\mathrm{T}}$ 为中面上节点 i 的坐标向量；$N_i(\xi,\eta)$为 2 维等参形状函数，ξ,η 为等参坐标变量；n 为单元节点数。再由曲面参数方程求法线公式，可得壳体中面法线向量 $\boldsymbol{r}$ 及其单位向量 $\boldsymbol{r}^0$：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}_{c,\xi}\times\boldsymbol{x}_{c,\eta}$，$\boldsymbol{r}^0=\boldsymbol{r}/\|\boldsymbol{r}\|$。其中 $\boldsymbol{x}_{c,\xi}$和 $\boldsymbol{x}_{c,\eta}$为壳体中面在点 $\boldsymbol{x}_c$ 处分别对应于 ξ,η 方向的切向量。有了壳体法线向量及 $\boldsymbol{x}_{c,\xi}$和 $\boldsymbol{x}_{c,\eta}$，便不难得出壳体中面上任意一点处以法线方向为纵轴的局部坐标系的余弦矩阵[6]，也即得到 Gauss 点局部坐标系的余弦矩阵。由于壳体结构的本构关系都是在局部参考坐标系内定义，所以这一点十分重要。

1.2　刚性线段的运动学描述

刚性线段的运动学的详细理论参见文[2]及有关其他文献，在此只将重要结论扼要描述如下：假设有刚性线段 A_0B_0，初始 t_0 时刻方向向量为 $\boldsymbol{r}_0$，在 t 时刻时占据位形 A_1B_1，方向向量变为 $\boldsymbol{r}_1$；记 A_0 到 A_1 的位移向量为 $\boldsymbol{u}_A$，B_0 到 B_1 的位移向量为 $\boldsymbol{u}_B$，向量 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}_1$ 的一次转动转轴向量为 $\boldsymbol{\Theta}$①，于是有 $\boldsymbol{u}_B=\boldsymbol{u}_A+\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{T}\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}+g\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\Theta})+f\boldsymbol{S}^2(\boldsymbol{\Theta})$。其中转轴向量 $\boldsymbol{\Theta}(=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)^{\mathrm{T}})$对应的单位向量 $\boldsymbol{\Theta}^0=\boldsymbol{\Theta}/\|\boldsymbol{\Theta}\|$和欧拉模 $\theta=\|\boldsymbol{\Theta}\|=(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)^{1/2}$即分别代表了转轴的方向向量和该转轴所表征的一次转动的转角大小，同时 $g=\sin\theta/\theta$，$f=(1-\cos\theta)/\theta^2$ 及

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\Theta})=\begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

另外定义 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_1$ 对应的单位向量分别为 $\boldsymbol{r}_0^0$ 和 $\boldsymbol{r}_1^0$，由 $\boldsymbol{r}_0^0$ 转动到 $\boldsymbol{r}_1^0$ 所引起的位移向量为 $\boldsymbol{s}$，则

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}_1^0-\boldsymbol{r}_0^0=(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{r}_0^0=\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{r}_0^0 \tag{2}$$

特别指出，描述 $\boldsymbol{r}_0$ 转动到 $\boldsymbol{r}_1$ 的单位正交的有限转动矩阵 $\boldsymbol{T}$，在板壳有限变形理论中至关重要。这里以不做任何简化的有限转动矩阵 $\boldsymbol{T}$ 来精确表达位移—应变关系，并引进一次转动转轴的概念，是本文的特色之一。

2　应变和应力分析

1.1 中已经指出，壳体结构的本构关系都在局部参考坐标系内定义，因而有关坐标、位移的插值和应变、应力的描述在 Gauss 积分点局部坐标系内进行列式是必要的。以下列式如不特别说明都指在 Gauss 点局部坐标系内进行。当然这里要求计算单元刚度矩阵时，必须先对

①$\boldsymbol{\Theta}$ 是一个伪向量，不具有向量直接叠加的特性；它的 3 个分量也不能与线性问题中的微小转角一样当作独立的转角来对待，而必须相互耦合作为一个转轴整体才能完整有效地表征有限转动问题。这个转轴整体实际包含转轴方向和绕该转轴的一次转动的转角大小 2 层含义。

在Gauss点局部坐标系建立的矩阵进行相应的坐标变换,然后再叠加成整体坐标系的单元刚度矩阵。

2.1 坐标插值

仍设壳体中面节点i的坐标向量为$\boldsymbol{x}_i$,初始时刻节点i的法线向量为$\boldsymbol{r}_{i0}$,其单位向量为$\boldsymbol{r}_{i0}^0$;中面上任意点A_0的坐标向量为$\boldsymbol{x}_c$,过A_0的中面法线为$\boldsymbol{r}_0$,法线$\boldsymbol{r}_0$上的任意一点B_0的坐标向量为$\boldsymbol{X}=(X,Y,Z)^{\mathrm{T}}$,点$B_0$所对应法线方向的等参坐标变量为$\zeta$,则结合式(1)得到

$$\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{n}N_i(\xi,\eta)\left(\boldsymbol{x}_i+\frac{h_i\zeta}{2}\boldsymbol{r}_{i0}^0\right)$$

由此可求得参考坐标系与$\xi\eta\zeta$等参坐标系之间的雅可比矩阵$\boldsymbol{J}$及其逆矩阵$\boldsymbol{J}^{-1}$。

2.2 位移插值

设变形引起的壳体中面上节点i的位移向量为$\boldsymbol{u}_i=(u_i,v_i,w_i)^{\mathrm{T}}$,中面上节点$i$处的法线$\boldsymbol{r}_{i0}$转动到$\boldsymbol{r}_{i1}$的转轴向量为$\boldsymbol{\Theta}_i$;中面上任意点$A_0$的位移向量为$\boldsymbol{u}_c=(u_c,v_c,w_c)^{\mathrm{T}}$,点$A_0$的中面法线$\boldsymbol{r}_0$上任意一点$B_0$的位移向量为$\boldsymbol{U}=(U,V,W)^{\mathrm{T}}$,并由式(2)记$\boldsymbol{r}_{i1}^0-\boldsymbol{r}_{i0}^0=\boldsymbol{s}_i$,则有

$$\boldsymbol{U}=\sum_{i=1}^{n}N_i(\xi,\eta)\left(\boldsymbol{u}_i+\frac{h_i\zeta}{2}\boldsymbol{s}_i\right) \tag{3}$$

2.3 位移对坐标的偏导数及符号定义

由式(3)对x求偏导数得

$$\boldsymbol{U}_{,x}=\sum_{i=1}^{n}N_{i,x}\boldsymbol{u}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{2}a_{ix}\boldsymbol{s}_i \tag{4}$$

其中$a_{ix}=N_{i,x}\zeta+N_i\zeta_{,x}$,并定义

$$\begin{cases}\boldsymbol{H}_{ix}=N_{i,x}\cdot\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{\Omega}_{ix}=\dfrac{h_i}{2}a_{ix}\cdot\boldsymbol{I}\end{cases}\qquad\begin{cases}\boldsymbol{H}_x=[\boldsymbol{H}_{1x}\quad\boldsymbol{H}_{2x}\quad\cdots\quad\boldsymbol{H}_{nx}]_{3\times3n}\\ \boldsymbol{\Omega}_x=[\boldsymbol{\Omega}_{1x}\quad\boldsymbol{\Omega}_{2x}\quad\cdots\quad\boldsymbol{\Omega}_{nx}]_{3\times3n}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=(\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{s}&=(\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{s}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{s}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{5}$$

于是式(4)可以写成

$$\boldsymbol{U}_{,x}=\boldsymbol{H}_x\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\Omega}_x\boldsymbol{s} \tag{6}$$

由式(3)对y求偏导数时类似x方向的推导,只把相应x换成y即得$\boldsymbol{U}_{,y}=\boldsymbol{H}_y\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\Omega}_y\boldsymbol{s}$。

由式(3)对z求偏导数得

$$\boldsymbol{U}_{,z}=\sum_{i=1}^{n}N_i(\xi,\eta)\frac{h_i}{2}\zeta_{,z}\boldsymbol{s}_i$$

由于在Gauss局部坐标系时$\zeta_{,z}=2/h$,$h=\sum_{i=1}^{n}N_ih_i$,定义$\boldsymbol{\Omega}_{iz}=N_i(\xi,\eta)(h_i/h)\cdot\boldsymbol{I}$(对等厚度单元$\boldsymbol{\Omega}_{iz}=N_i(\xi,\eta)\cdot\boldsymbol{I}$),$\boldsymbol{\Omega}_z=[\boldsymbol{\Omega}_{1z}\quad\boldsymbol{\Omega}_{2z}\quad\cdots\quad\boldsymbol{\Omega}_{nz}]_{3\times3n}$,则$\boldsymbol{U}_{,z}=\boldsymbol{\Omega}_z\boldsymbol{s}$。

2.4 Green-Lagrange应变和Kirchhoff应力

现定义

$$\boldsymbol{\Lambda}_x=\boldsymbol{U}_{,x}+\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{\Lambda}_y=\boldsymbol{U}_{,y}+\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{\Lambda}_z=\boldsymbol{U}_{,z}+\boldsymbol{k} \tag{7}$$

其中$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$是笛卡儿直角坐标系中的3个单位坐标向量,则Green-Lagrange应变对应的工程应变分量可以写作如下形式:

$$\left.\begin{aligned}E_{xx}=\frac{1}{2}(\Lambda_x^{\mathrm{T}}\Lambda_x-1),E_{yy}=\frac{1}{2}(\Lambda_y^{\mathrm{T}}\Lambda_y-1),E_{zz}=\frac{1}{2}(\Lambda_z^{\mathrm{T}}\Lambda_z-1)\\E_{xz}=\Lambda_x^{\mathrm{T}}\Lambda_z,E_{yz}=\Lambda_y^{\mathrm{T}}\Lambda_z,E_{xy}=\Lambda_x^{\mathrm{T}}\Lambda_y\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

由于有刚性线段假设,以初始构形为参考构形的应变 E_{zz} 可以证明理论上为零[1],计算中可不计入该项。分别定义 Green-Lagrange 应变向量和第 2 类 Piola-Kirchhoff 应力向量为 $\boldsymbol{E}=(E_{xx}\quad E_{yy}\quad E_{xy}\quad E_{xz}\quad E_{yz})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{S}=(S_{xx}\quad S_{yy}\quad S_{xy}\quad S_{xz}\quad S_{yz})^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 之间由本构矩阵来联系。为了明了,这里不妨假定具有能量共轭关系的 Green-Lagrange 应变张量与第 2 类 Piola-Kirchhoff 应力张量之间满足线弹性时的本构矩阵,于是

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}\tag{9}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}D_1&D_2&0&0&0\\D_2&D_1&0&0&0\\0&0&D_3&0&0\\0&0&0&D_{45}&0\\0&0&0&0&D_{45}\end{bmatrix}$$

其中:$D_1=E/(1-\nu^2)$,$D_2=\nu E/(1-\nu^2)$,$D_3=E/[2(1+\nu)]$,$D_{45}=E/2$(E 是杨氏模量,ν 是泊松比)。

需要指出的是,在应用中实际本构矩阵的形式可根据具体情况选定或者直接由实验来确定,也就是说本文的列式并没有对材料的性质作任何限制,而只是为突出研究的重点,这里暂不进行本构矩阵具体形式的详细研究。

3　有限元平衡方程

为清楚起见,采用只包含 1 个单元的简化记法,于是壳体在平衡位置的虚功方程为

$$\delta W^{(i)}=\delta W^{(e)}\tag{10}$$

$\delta W^{(i)}$ 和 $\delta W^{(e)}$ 分别代表壳体在平衡状态时的内力虚功和外力虚功。记 $\boldsymbol{P}$ 为平衡位置时所有外部的节点集中力、面力、体力的等效节点载荷,$\delta\boldsymbol{q}$ 代表平衡位置时所有节点的虚位移向量,则可直接写出关于 $\delta\boldsymbol{q}$ 的外力虚功表达式

$$\delta W^{(e)}=\delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\tag{11}$$

另一方面,据有限变形的几何非线性基本理论,写出关于 $\delta\boldsymbol{q}$ 的内力虚功表达式

$$\delta W^{(i)}=\int_{V_0}\delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\mathrm{d}V_0\tag{12}$$

下面重点求 $\delta\boldsymbol{E}$ 与 $\delta\boldsymbol{q}$ 之间的关系表达式。由式(8)可得

$$\delta E_{xx}=\Lambda_x^{\mathrm{T}}\cdot\delta\Lambda_x=\delta\Lambda_x^{\mathrm{T}}\cdot\Lambda_x\tag{13}$$

根据式(7)和(6)有 $\delta\Lambda_x=\boldsymbol{H}_x\delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\Omega}_x\delta\boldsymbol{s}$。这里 $\delta\boldsymbol{s}$ 只与 $\delta\Theta$ 有关。不妨先假设

$$\delta\boldsymbol{s}=\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{\Theta}\tag{14}$$

而关于 $\boldsymbol{L}$ 矩阵的讨论,放在后文进行,则有

$$\delta\Lambda_x=\boldsymbol{H}_x\delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\Omega}_x\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{\Theta}=[\boldsymbol{H}_x\quad\boldsymbol{\Omega}_x\boldsymbol{L}]\delta\boldsymbol{q}\tag{15}$$

代入式(13),并引入记号 $\boldsymbol{B}_{xx}$,得到

$$\delta E_{xx}=\delta \boldsymbol{\Lambda}_x^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Lambda}_x=\delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_x^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_x^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_x=\delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{xx} \tag{16}$$

类似上述推导，并分别引入记号 $\boldsymbol{B}_{yy}$，$\boldsymbol{B}_{xy}$，$\boldsymbol{B}_{xz}$，$\boldsymbol{B}_{yz}$等，可得其他 4 个应变分量的变分。将所得结论代入式(12)，然后连同式(11)一并代入式(10)，并考虑到 $\delta\boldsymbol{q}$ 的任意性，即得到有限元平衡方程式

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q})=\int_{V_0}(\boldsymbol{B}_{xx}S_{xx}+\boldsymbol{B}_{yy}S_{yy}+\boldsymbol{B}_{xy}S_{xy}+\boldsymbol{B}_{xz}S_{xz}+\boldsymbol{B}_{yz}S_{yz})\mathrm{d}V_0-\boldsymbol{P}=0 \tag{17}$$

4 有限元平衡方程的 Newton 解法和切线刚度阵

现用 Newton 方法求解有限元平衡方程式。将式(17)展开成 Taylor 级数，形式如下：

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q}+\Delta\boldsymbol{q})=\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q})+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}\Delta\boldsymbol{q}+\boldsymbol{O}(\Delta\boldsymbol{q}^2)=0 \tag{18}$$

忽略其中 $\Delta\boldsymbol{q}$ 的高阶项，并记

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}\Delta\boldsymbol{q}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{t}}\Delta\boldsymbol{q} \tag{19}$$

则由方程(18)可写出有限元平衡方程式 Newton 解法的迭代格式 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{t}}\Delta\boldsymbol{q}=-\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q})$，$\boldsymbol{K}_{\mathrm{t}}$ 即为所求切线刚度矩阵。

由式(17)写出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}=\int_{V_0}(\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{xx}S_{xx}+\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{yy}S_{yy}+\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{xy}S_{xy}+\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{xz}S_{xz}+\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{yz}S_{yz}+$$
$$\boldsymbol{B}_{xx}\mathrm{d}S_{xx}+\boldsymbol{B}_{yy}\mathrm{d}S_{yy}+\boldsymbol{B}_{xy}\mathrm{d}S_{xy}+\boldsymbol{B}_{xz}\mathrm{d}S_{xz}+\boldsymbol{B}_{yz}\mathrm{d}S_{yz})\mathrm{d}V_0$$

注意到这里微分 d 只作用于节点位移，由式(16)得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{xx}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_x^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Lambda}_x\\ \mathrm{d}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Omega}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_x+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_x^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Lambda}_x\end{bmatrix}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Lambda}_x$ 可类似式(15)得出；$\mathrm{d}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ 仍只与 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}$ 有关，也放在后文讨论。不妨先记

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_x=\boldsymbol{M}_{xx}\mathrm{d}\boldsymbol{\Theta} \tag{20}$$

并引入记号 $\boldsymbol{A}_{xx}$，于是可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{xx}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_x & \boldsymbol{H}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_x\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_x & \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_x\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}_{xx}\end{bmatrix}\mathrm{d}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{A}_{xx}\mathrm{d}\boldsymbol{q}$$

仿照上述方法及定义，并分别引入记号 $\boldsymbol{A}_{yy}$，$\boldsymbol{A}_{xy}$，$\boldsymbol{A}_{xz}$，$\boldsymbol{A}_{yz}$，可得其他 4 个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的微分形式。

另一方面，由式(9)易得 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{E}$。应用式(16)，有

$$\mathrm{d}S_{xx}=(D_1\boldsymbol{B}_{xx}^{\mathrm{T}}+D_2\boldsymbol{B}_{yy}^{\mathrm{T}})\mathrm{d}\boldsymbol{q},\ \mathrm{d}S_{yy}=(D_2\boldsymbol{B}_{xx}^{\mathrm{T}}+D_1\boldsymbol{B}_{yy}^{\mathrm{T}})\mathrm{d}\boldsymbol{q}$$
$$\mathrm{d}S_{xy}=D_3\boldsymbol{B}_{xy}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{q},\ \mathrm{d}S_{xz}=D_{45}\boldsymbol{B}_{xz}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{q},\ \mathrm{d}S_{yz}=D_{45}\boldsymbol{B}_{yz}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{q}$$

将上述结论代入式(19)，并引入记号 $\boldsymbol{K}_u$ 和 $\boldsymbol{K}_\sigma$，即得切线刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{K}_u+\boldsymbol{K}_\sigma$。其中：$\boldsymbol{K}_u$ 称为初位移矩阵；$\boldsymbol{K}_\sigma$ 称为初应力矩阵或几何刚度矩阵。有

$$\boldsymbol{K}_u=\int_{V_0}[\boldsymbol{B}_{xx}(D_1\boldsymbol{B}_{xx}^{\mathrm{T}}+D_2\boldsymbol{B}_{yy}^{\mathrm{T}})+\boldsymbol{B}_{yy}(D_1\boldsymbol{B}_{yy}^{\mathrm{T}}+D_2\boldsymbol{B}_{xx}^{\mathrm{T}})+$$
$$\boldsymbol{B}_{xy}D_3\boldsymbol{B}_{xy}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_{xz}D_{45}\boldsymbol{B}_{xz}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_{yz}D_{45}\boldsymbol{B}_{yz}^{\mathrm{T}}]\mathrm{d}V_0$$

$$\boldsymbol{K}_{\sigma}=\int_{V_0}(\boldsymbol{A}_{xx}S_{xx}+\boldsymbol{A}_{yy}S_{yy}+\boldsymbol{A}_{xy}S_{xy}+\boldsymbol{A}_{xz}S_{xz}+\boldsymbol{A}_{yz}S_{yz})\mathrm{d}V_0$$

在Newton格式迭代求解的过程之中,每一步求得增量位移向量$\Delta\boldsymbol{q}^{(i)}$后,都要进行相应的位移更新。其中线位移$\Delta\boldsymbol{u}^{(i)}$部分直接叠加即可

$$\boldsymbol{u}^{(i+1)}=\boldsymbol{u}^{(i)}+\Delta\boldsymbol{u}^{(i)} \tag{21a}$$

而转轴位移所对应的增量转轴向量$\Delta\boldsymbol{\Theta}^{(i)}$却是不能简单叠加的,而必须通过有限转动的四元数叠加规律来进行。关于有限转动叠加规律的讨论也放在后文进行,这里只形象地用符号$\oplus$代表四元数叠加,把增量转轴向量$\Delta\boldsymbol{\Theta}^{(i)}$的更新过程记为

$$\boldsymbol{\Theta}^{(i+1)}=\boldsymbol{\Theta}^{(i)}\oplus\Delta\boldsymbol{\Theta}^{(i)} \tag{21b}$$

由式(21),位移更新即告完成。这是标准的Newton迭代方法,它不同于修正的Newton方法,即不一定非要等到每一加载步收敛后才进行位移更新,而可以把每一次迭代后的位置都看成一个中间的平衡位置,随时更新迭代结果。当然该中间位置的平衡载荷与该加载步的最终收敛载荷一般尚有差距,但是失衡力的迭代过程正是来逐步修正这一差距,并最后求得收敛解。计算中,当迭代进入Newton吸引区之内时,便可以观察到明显的平方收敛率,但是,如果加载步长过大使得该加载步的初值和收敛终值相差太远,以至逃离Newton收敛区时,则会导致迭代发散。

参 考 文 献

1 Buechter N, Ramm E. Shell theory versus degeneration — a comparison in large rotation finite element analysis. Int J Numer Methods Engrg,1992,34:39～59

2 李明瑞.梁板壳结构有限变形的普遍理论及其应用.中国农业大学学报,1996,1(2):17～24

3 Li Mingrui. The finite deformation theory for beam, plate and shell (Part Ⅰ. The two～dimensional beam theory). Comput Methods Appl Mech Engrg,1997,146:53～63

4 Li Mingrui. Green-Lagrangian strains of beam, plate and shell structures during finite deformation. Progress in Natural Science,1997,7:649～661

5 Li Mingrui. The finite deformation of beam, plate and shell structures (Part Ⅱ. The kinematic model and the Green-Lagrangian strains). Comput Methods Appl Mech Engrg,1998,156:247～257

6 Ahmad S, Irons B M, Zienkiewicz O C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. Int J Numer Methods Engrg,1970,2:419～451