

薄壁梁端部力的近似等效问题

鲍永方^① 黄文彬

(中国农业大学工程基础科学部)

摘要 利用折板壳有限元方法研究了薄壁截面杆件受横向荷载作用时膜应力的大小和分布规律。认为对薄壁杆件端部力的近似等效原则为合力、合力矩、双力矩和横向双力矩都给定,则离杆端远处的应力就基本确定。

关键词 等效力系;薄壁杆件;横向双力矩

中图分类号:O342

Problems of Approximate Equivalent of End Force on Thin-walled Beams

Bao Yongfang Huang Wenbin

(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Abstract The size and distribution of stress in thin-walled beams loaded by lateral force are computed through fold plate and shell FEM. The approximate equivalent principles of ended force on thin-walled beams can be stated as follows: if the resultant force, resultant moment, bimoment and cross bimoment are given, then the stress on the far end of the thin-walled beam can be determined.

Key words equivalent force; thin-walled beams; cross bimoment

对于实心截面的梁,只要杆端部的合力和合力矩给定,不管具体的应力分布形式,在离端部一定距离处截面的应力就近似一样。这就是传统的圣维南原理。对于薄壁截面的梁,传统的圣维南原理的这一提法就不适用;但对薄壁杆件的研究得出,如果端部的双力矩值也给定,则同样能得出离端部一定距离处截面的应力近似一样的结论。目前各种手册中有关薄壁杆件的公式,都是根据这一端部力的近似等效原则来处理的。

现在的问题是只增加 1 个双力矩是否就够了。由于双力矩是与截面的刚周边假定相联系的,但实际上存在一种能使横截面产生畸变的零等效力系,我们称之为“横向双力矩”。只有端部的横向双力矩也给定时,才能使离端部一定距离处的应力确定。笔者用折板壳有限元方法^②作了计算,其结果证实了这个论断。

收稿日期:1996-12-23

①鲍永方,北京清华东路 17 号中国农业大学(东校区)75 信箱,100083

②李明瑞,冯云田,魏祖健.微型机和有限元软件 FEM 使用手册.北京:北京农业工程大学,1991

1 开口薄壁截面杆件情况的讨论

选用槽形悬臂梁作为研究对象,其截面形状如图 1 所示。实际计算时取杆长 $l=50\text{ cm}$,腹板高 $h=10\text{ cm}$,翼缘宽 $b=5\text{ cm}$,厚度 $t=1\text{ cm}$,材料的弹性模量 $E=210\text{ GPa}$,切变模量 $G=84\text{ GPa}$ 。

有限元网格剖分为沿杆长分成 10 段,沿腹板分成 10 段,沿翼缘分成 5 段,这样整个结构共有单元 200 个,节点 231 个,如图 2(a)所示。对于每个矩形单元,取局部坐标系 $oxyz$ 后,可求出板在中点 o 的膜应力 σ_x, σ_z 和 σ_{xz} ,以及板在点 o 的单位宽度弯矩 M_x, M_z 和 M_{xz} ,如图 2(b)所示。这里只比较截面上点 1 的轴向膜应力,点 1 的位置如图 2(a),它是上翼缘靠近端部的第 1 个矩形单元的形心。

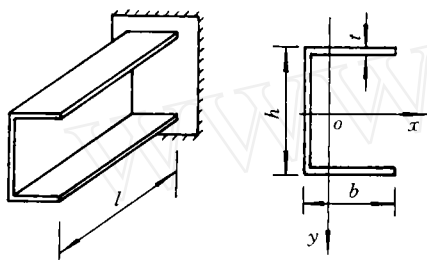


图 1 悬臂梁及其槽形截面

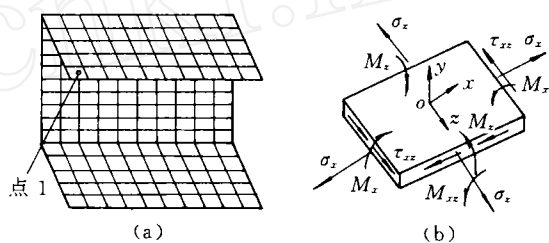


图 2 有限元剖分与力(矩)的符号

在自由端加横向荷载,加载方式共分为 4 组,如图 3 所示。第 1 组如图 3(a, b, c),横向荷载平行于翼缘,扭矩为 $1\ 000\text{ N}\cdot\text{cm}$;第 2 组如图 3(d, e),横向荷载是在两翼缘的端部施加的 1 对垂直于翼缘的大小相等、方向相反的力,它是一组自相平衡的力系;第 3 组如图 3(f, g, h),横向荷载平行于腹板,扭矩都是 $1\ 000\text{ N}\cdot\text{cm}$;第 4 组如图 3(i, j),荷载是第 1 组荷载与第 2 组荷载的反向叠加,它也是一组自相平衡力系,合力、合力矩和双力矩都为零。

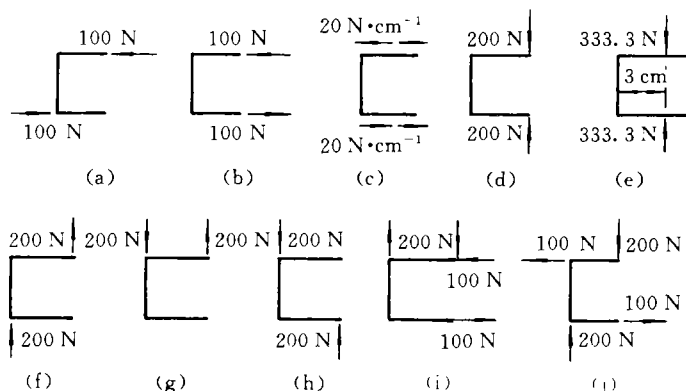


图 3 槽形截面载荷图

各种加载方式下膜应力的计算值见表 1。

从有限元计算结果来看:1)4 组荷载的每一组中,加载方式有所不同,但在远离加载区域处,各截面上的膜应力相等,因此,表 1 只给出每一组中的一种加载方式下的膜应力值,作为代表,在每一组中等效力系原则适用;2)对于第 2 组荷载,从表 1 的数据看出,由于它是自相平衡力系且双力矩为零,引起的膜应力近似为零,等效力系原则也适用;3)对于第 4 组荷载,它是第 1 组荷载与第 2 组荷载的叠加,同第 3 组荷载一样,也是自相平衡力系且双力矩为零,在远离端部区膜应力也应为零;但从表 1 数据可以看出,在该区膜应力还相当大,在有的截面上甚至超过了扭矩引起的膜应力,大小衰减也比较慢。它表明第 1 组与第 3 组的力偶是不等效的。为

表1 开口薄壁截面杆件各种加载方式下膜应力的计算值 $N \cdot cm^{-2}$

截面位置	第1组	第2组	第3组	第4组	截面位置	第1组	第2组	第3组	第4组
0.05l	227.80	-0.05	217.90	9.93	0.55l	65.44	0.42	42.64	22.80
0.15l	180.30	0.02	169.10	11.10	0.65l	51.09	0.65	23.25	27.85
0.25l	140.20	0.06	127.50	12.70	0.75l	40.67	0.92	6.03	34.46
0.35l	108.10	0.13	92.97	15.12	0.85l	31.98	2.60	-11.50	43.46
0.45l	83.82	0.25	85.32	18.50	0.95l	47.12	3.00	-11.60	58.77

为了使端部等效力原则适用,必须引进新的附加条件:横向双力矩必须相等。定义横向双力矩

$$M = q_x y + q_y x$$

式中: q_x, q_y 分别表示平行于 x 轴和 y 轴的横向荷载,符号规定与 x, y 轴的正向一致时为正; x 和 y 是到坐标原点的距离,如图 4(a)所示。引进横向双力矩之后,可见由于第 2 组荷载的横向双力矩为零,因此

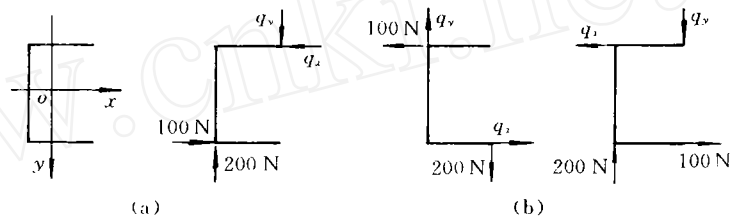


图4 横向双力矩(a)与等效横向双力矩(b)

其膜应力的大小也为零。第 1 组荷载横向双力矩为 $1000 N \cdot cm$,而第 3 组荷载横向双力矩为 $-1000 N \cdot cm$,横向双力矩不等,因此膜应力也不等。根据以上的定义,以下几种荷载应该是等效的,如图 4(b)所示,因为它们的横向双力矩都为 $2000 N \cdot cm$ 。有限元计算结果证实了这一点。膜应力大小与横向双力矩大小也成比例。

此外,有限元计算结果表明:1)横向双力矩引起的膜应力在截面上的分布规律同扭转引起的膜应力分布规律,都按扇形坐标分布;2)横向双力矩作用下,最大膜应力与杆长无关,主要取决于截面厚度,截面厚度越小,膜应力越大;3)翼缘与腹板的长度尺寸越大,膜应力也越小;4)膜应力的衰减速度与杆长有关,杆越长,衰减越快。以上的分析表明:当槽形截面受横向荷载,当合力、合力矩以及双力矩相等时,其膜应力并不一定等效,还需判别横向双力矩是否相等。这样,对于开口薄壁截面杆件,端部力等效的新的适用条件是:合力、合力矩、双力矩及横向双力矩相等。

2 闭口薄壁截面杆件的情况讨论

同讨论开口薄壁杆件时一样,取悬臂箱形梁作为研究对象。杆长 $l=50 cm$,翼缘宽 $b=10 cm$,腹板高 $h=5 cm$,截面厚度 $t=1 cm$,如图 5 所示。材料参数同前。

有限元网格剖分沿纵向分为 20 段,沿腹板和翼缘各分为 5 段,这样,整个杆件共有单元 400 个,节点 420 个,每个单元都是矩形单元,如图 5(b)所示。这里只讨论单元形心处的膜应力。现分析右腹板上点 1 处的膜应力,点 1

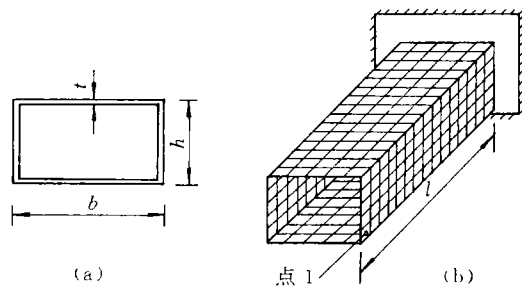


图5 悬臂闭口杆件截面(a)及其有限元剖分(b)

是靠近下翼缘第 1 个单元的形心位置。

在自由端按图 6 所示的 4 种方式加载:图 6(a,b,c)为第 1 组,图 6(d,c)为第 2 组,图 6(f,g,h)为第 3 组,图 6(i,j)为第 4 组。

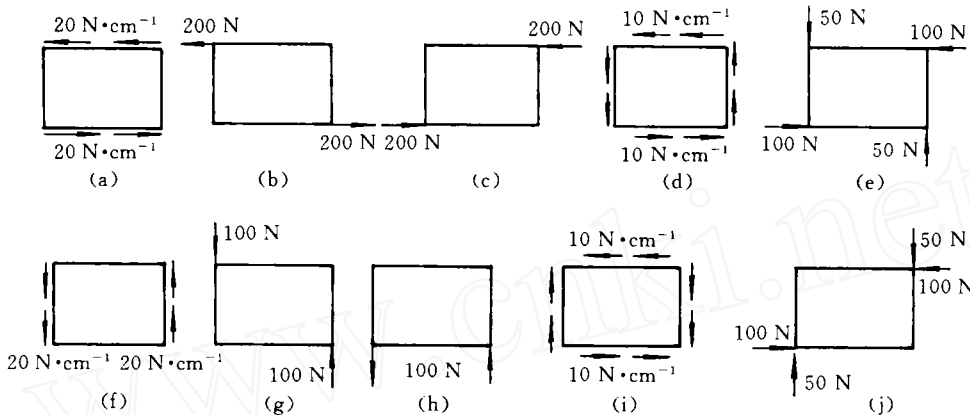


图 6 作用在悬臂闭口杆件截面上的 4 组外载

表 2 闭口薄壁截面杆件各种加载方式下膜应力的计算值 $N \cdot cm^{-2}$

截面位置	第 1 组	第 2 组	第 3 组	第 4 组	截面位置	第 1 组	第 2 组	第 3 组	第 4 组
0.025l	4.72	3.31	3.31	1.36	0.525l	-4.49	-0.21	4.06	-8.45
0.125l	2.57	2.04	1.52	1.04	0.625l	-8.57	-0.22	8.08	-16.40
0.225l	1.05	0.78	0.50	0.55	0.725l	-13.60	-0.22	13.13	-26.30
0.325l	-0.20	0.13	0.46	-0.67	0.825l	-17.50	-0.21	17.07	-34.00
0.425l	-1.84	-0.13	1.56	-3.38	0.925l	-15.30	-0.10	15.07	-30.70

根据有限元的计算结果,每组荷载中,虽然加载方式不完全相同,但在远离加载端处(如离开加载端最大截面尺寸处),其膜应力的大小和分布规律完全相同。可见,在每一组中,等效力原则是适用的;但是,从表 2 看出,第 1,2,3 组荷载的合力、合力矩和双力矩都相等,引起的膜应力相差很大,第 4 组荷载是第 1,第 3 组荷载的叠加,是自相平衡力系,它引起的膜应力远大于扭矩引起的膜应力。同分析开口薄壁杆件一样,等效力原则中适用的附加条件必须使横向双力矩相等(横向双力矩的定义同前)。由于第 1 组荷载的横向双力矩为 $1000 N \cdot cm$,第 2 组荷载的横向双力矩为零,第 3 组荷载的横向双力矩为 $-1000 N \cdot cm$,3 组荷载的横向双力矩不等,它们引起的膜应力自然也不等;第 2 组荷载的横向双力矩为零,引起的膜应力最小。

3 结 论

通过对开口与闭口薄壁杆件的端部等效力现象的研究,可以看出,合力、合力矩和双力矩相等的力不一定等效,还要判断横向双力矩是否相等。对于开口薄壁杆件,横向双力矩引起的最大膜应力与同样大小的扭矩引起的最大膜应力相比,是较小量;对于闭口薄壁杆件,横向双力矩引起的最大膜应力是同样大小的扭矩引起的膜应力的几倍。应用端部等效力原则时更应注意判断横向双力矩是否相等。